Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu

MATEMATİK

8. Sınıf

Ders Kitabı

Zümrüt SERFİÇELİ

Diler ATMAZ

Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 28.05.2018 tarih ve 78 sayılı kararıyla
2018-2019 öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle
ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

KÖK-e
yayıncılık

Dil Uzmanı
Emel YELKENCİ SARAL

Görsel Tasarım Uzmanı
Özgür Hakan ASLAN

Baskı ve Cilt:
başak Matbaacılık ve Tanıtım Hiz. Ltd. Şti.

Sertifika No: 12689

Baskı Yeri ve Yılı: Ankara, 2019

Yayıncı Sertifika No: 41684
ISBN: 978-605-65707-5-9

KÖK-e yayıncılık

İncesu Cad. No.: 10/1 06670 Kolej/Ankara
Tel.: (0312) 435 04 97 • 434 47 22
Faks: (0312) 430 26 22

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

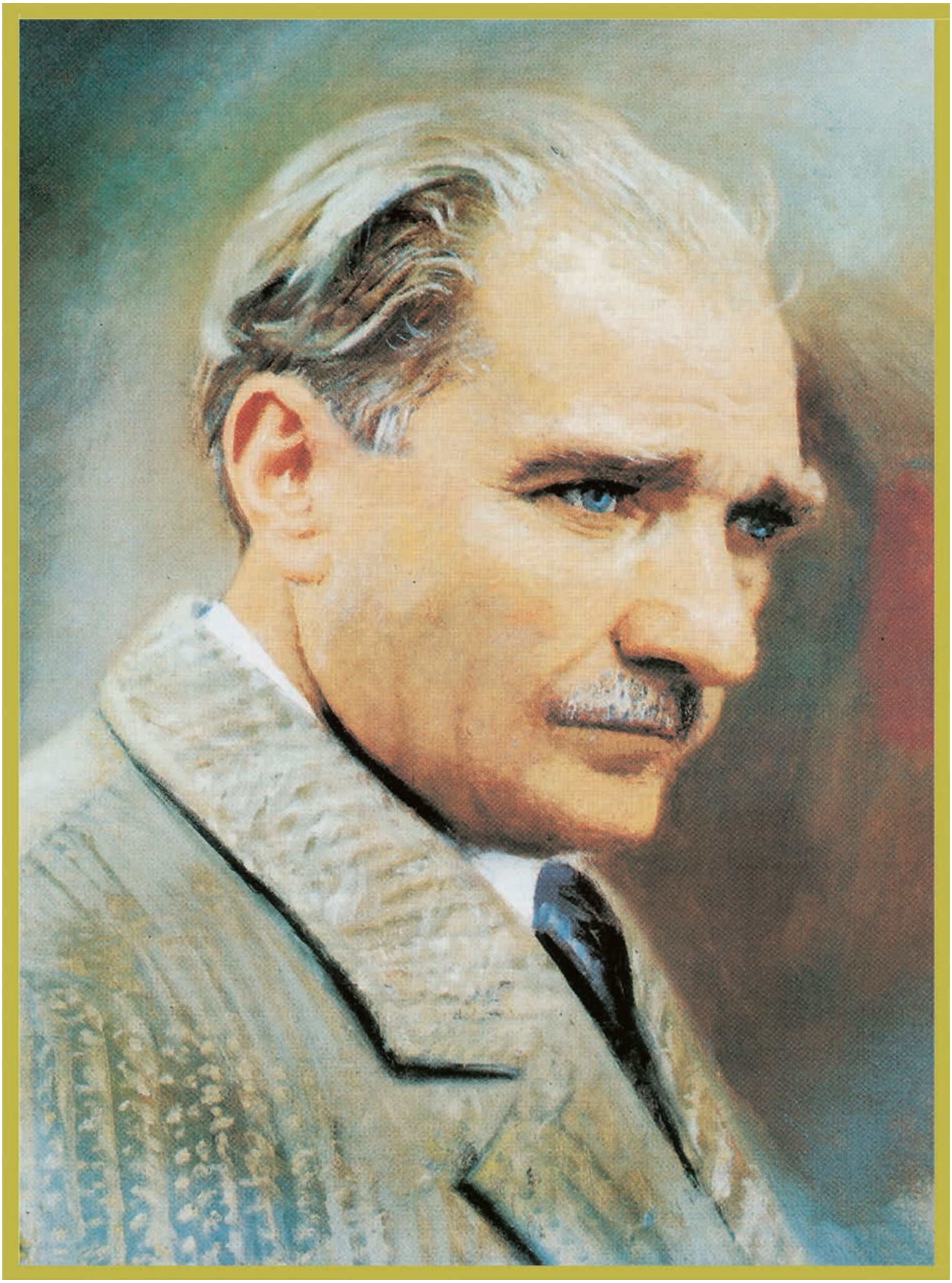
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

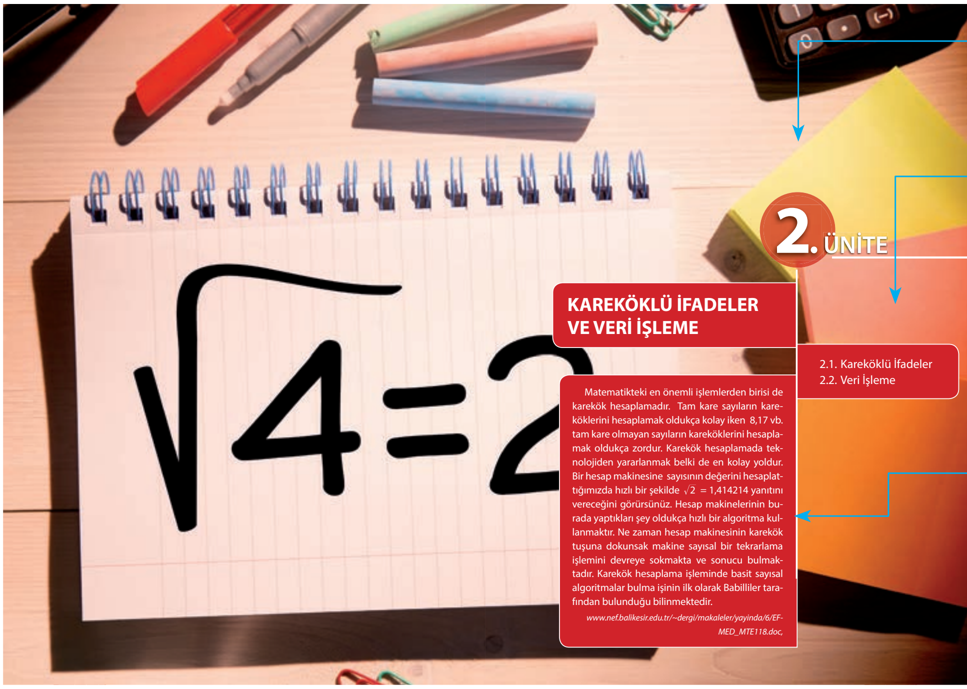
İÇİNDEKİLER

4. Ünite Denklem ve Eşitsizlikler

5. Ünite Geometri

6. Ünite Geometri ve Ölçme

EKLER



Kaçıncı ünite olduğunu ifade eder.

Bu ünitedeki bölüm adlarını ve sayısını gösterir.

Bu ünitedeki kazanımları edinebilmeniz için sizi öğrenmeye isteklendirecek bilgiyi gösterir. Bu bilgi, matematikle günlük yaşam ve diğer dersler arasında ilişki kurmanızı da sağlar. Matematiğin diğer derslerde de kullanılması gereken önemli bir ders olduğunu görmenize yardımcı olur.

Ünite içindeki bölüm sırasını ve bölüm başlığını gösterir.

Bu bölümde karşılaşacağınız terimlerin listesidir.

Bu bölümdeki çalışmaları yaparken kullanacağınız sembolleri gösterir.

Kitabınızın sayfa numarasını gösterir.

Bu okuma parçaları sizi, ne kadar önemli kazanımlar elde edeceğiniz konusunda bilinçlendirecektir. Bu bilgileri araştırma yaparak çoğaltabilirsiniz.

Bu bölümde edineceğiniz yeni kazanımları ifade eder. Kazanımlar; sahip olmanız gereken bilgi, beceri ve tutumlardır.

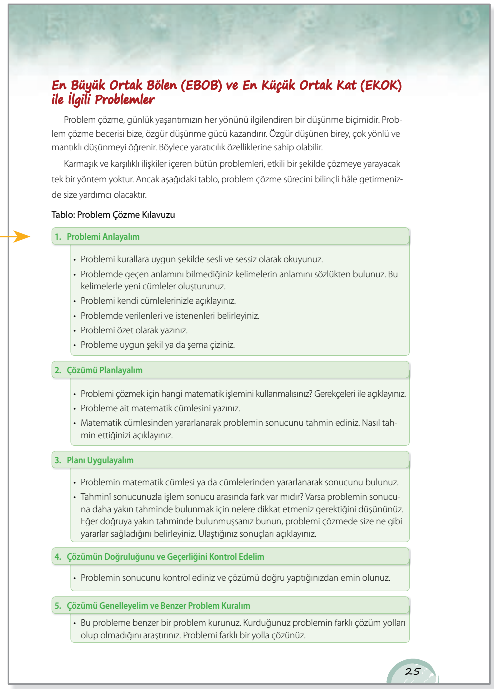
Bu kitapta kullanılan fotoğraf ve çizimler temsilidir.

TANIYALIM

1.1.3. Aralarında Asal Sayılar

Bölümlerde yer alan konuların alt başlıklarını gösterir.

Kitabınızda karşılaşacağınız problemlerin çözümünde size kılavuzluk eder. Bu kılavuzu kullanarak problem çözme becerisini edindiğinizde, günlük yaşantınızda karşılaştığınız problemleri de benzer yolla çözebilecek ve yaşantınızı kolaylaştırabileceksiniz.


En Büyük Ortak Bölen (EBOB) ve En Küçük Ortak Kat (EKOK) ile İlgili Problemler

Problem çözme, günlük yaşantımızın her yönünü ilgilendiren bir düşünme biçimidir. Problem çözme becerisi bize, özgür düşünme gücü kazandırır. Özgür düşünen birey, çok yönlü ve mantıklı düşünmeyi öğrenir. Böylece yaratıcılık özelliklerine sahip olabilir.

Karmaşık ve karşılıklı ilişkiler içeren bütün problemleri, etkili bir şekilde çözmeye yarayacak tek bir yöntem yoktur. Ancak aşağıdaki tablo, problem çözme sürecini bilinçli hâle getirmenizde size yardımcı olacaktır.

Tablo: Problem Çözme Kılavuzu

1. Problemi Anlayalım
   - Problemi kurallara uygun şekilde sesli ve sessiz olarak okuyunuz.
   - Problemde geçen anlamını bilmediğiniz kelimelerin anlamını sözlükten bulunuz. Bu kelimelerle yeni cümleler oluşturunuz.
   - Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
   - Problemde verilenleri ve istenenleri belirleyiniz.
   - Problemi özet olarak yazınız.
   - Probleme uygun şekil ya da şema çiziniz.
2. Çözümü Planlayalım
   - Problemi çözmek için hangi matematik işlemini kullanmalısınız? Gerekçeleri ile açıklayınız.
   - Probleme ait matematik cümlesini yazınız.
   - Matematik cümlesinden yararlanarak problemin sonucunu tahmin ediniz. Nasıl tahmin ettiğinizi açıklayınız.
3. Planı Uygulayalım
   - Problemin matematik cümlesi ya da cümlelerinden yararlanarak sonucunu bulunuz.
   - Tahminî sonucunuzla işlem sonucu arasında fark var mıdır? Varsa problemin sonucuna daha yakın tahminde bulunmak için nelere dikkat etmeniz gerektiğini düşününüz. Eğer doğruya yakın tahminde bulunmuşsanız bunun, problemi çözmede size ne gibi yararlar sağladığını belirleyiniz. Ulaştığınız sonuçları açıklayınız.
4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim
   - Problemin sonucunu kontrol ediniz ve çözümü doğru yaptığınızdan emin olunuz.
5. Çözümü Genelleyelim ve Benzer Problem Kuralım
   - Bu probleme benzer bir problem kurunuz. Kurduğunuz problemin farklı çözüm yolları olup olmadığını araştırınız. Problemi farklı bir yolla çözünüz.

25

Hatırlayalım

Bu çalışmalar, yeni edineceğiniz kazanımlar için ön hazırlıktır. Sizi yeni öğreneceğiniz bilgi, beceri ve tutumlara hazır hâle getirir. Daha kolay öğrenmenizi sağlar.

Etkinlik

Bu bölüme kitabınızda sıkça yer verilmiştir. Bu çalışmalarla; edinmek istediğiniz bilgi, beceri ve tutumları yaparak-yaşayarak kazanacaksınız. Böylece hem daha kolay ve iyi öğrenecek hem de sorumluluk, girişimcilik, bağımsızlık gibi erdemlerinizi geliştirebileceksiniz.

1. Örnek

Kitabınızın hemen hemen her sayfasında bu çalışmalarla karşılaşacaksınız. Bu çalışmalar sizi edinmeniz gereken kazanımlara ulaştırır.

Değerlendirme

Her ünitenin sonunda değerlendirme soruları verilmiştir. Bu sorular ünitede verilen kazanımları edinip edinmediğinizi yoklamak içindir. Her bir kazanım için en az bir soru sorularak hem derse karşı ilginizi artırmak hem de öğrendiklerinizin kalıcı olmasını sağlamak amaçlanmıştır.

Bilgi Kutusu

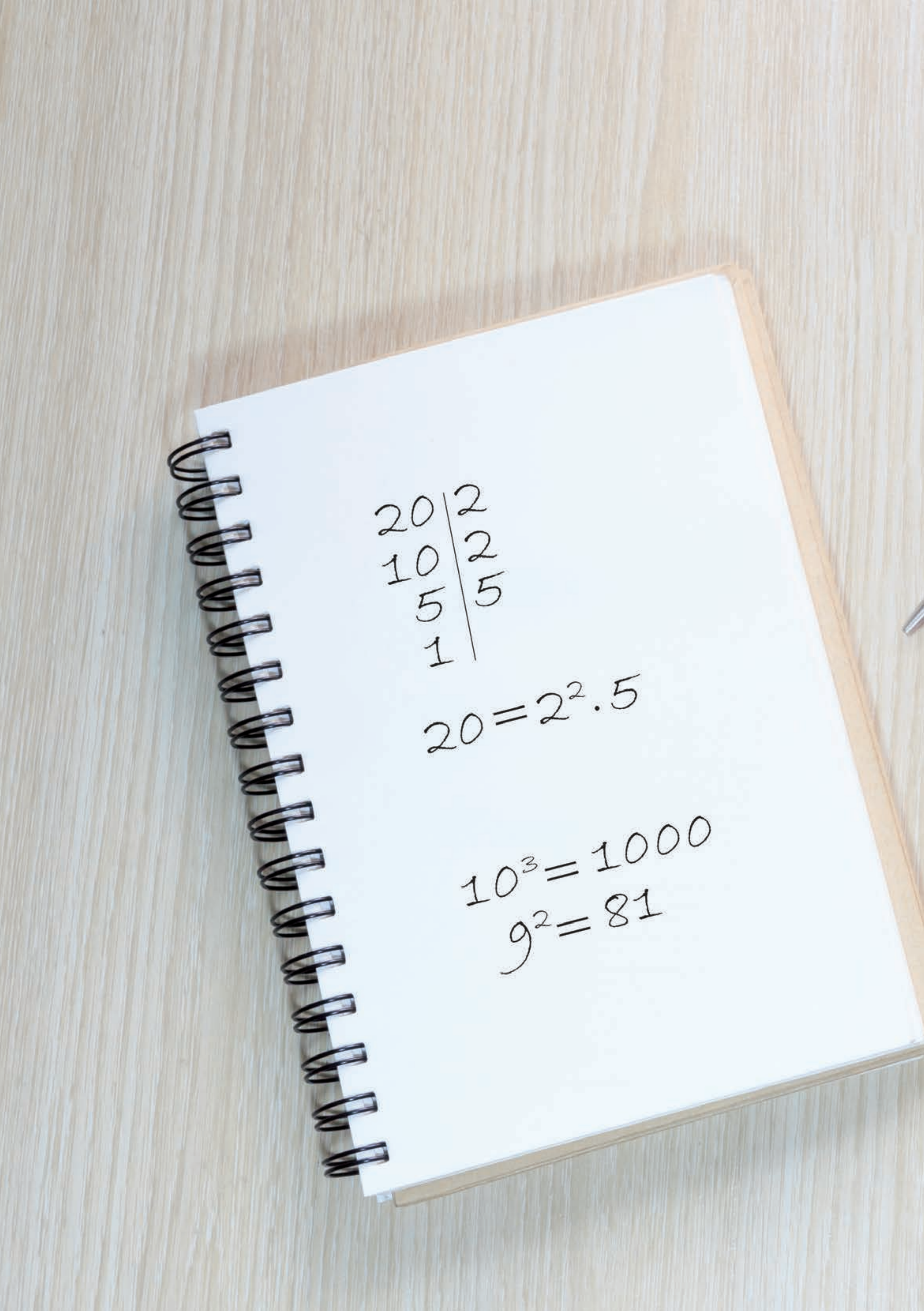
Bilgi kutusu, size yapacağınız çalışmalarla ilgili açıklayıcı bilgiler verir. Bilgi, sizin dış dünyadaki olayları algılama, işleme, değerlendirme ve muhakeme etme sonucunda zihninizde bir anlam oluşturur. Bu da kazanımları edinmenizi kolaylaştıracaktır.

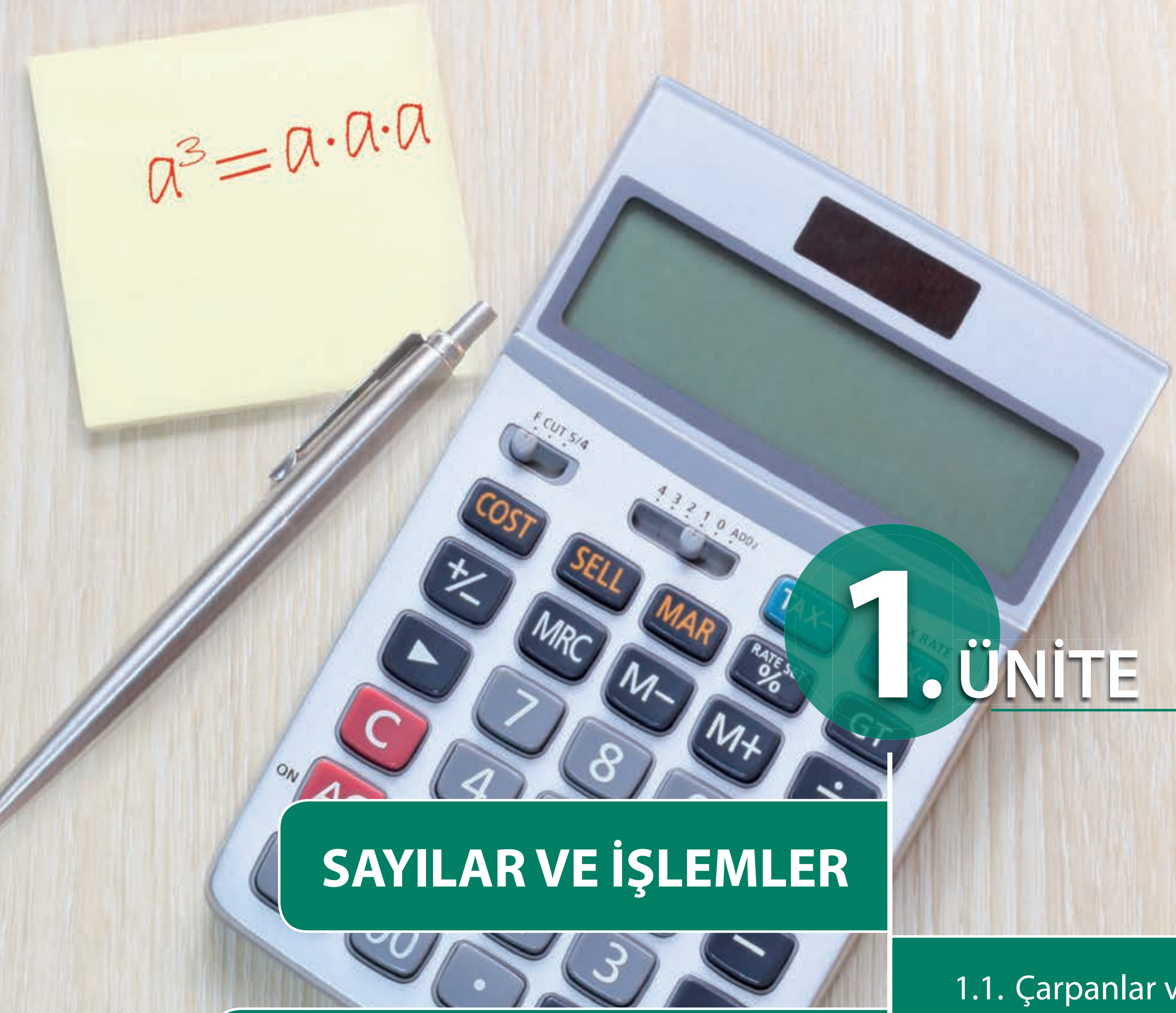
Sıra Sizde

Bu çalışmalar, edindiğiniz kazanımları pekiştirmeniz amacıyla kendi kendinize yapmanız için verilmiştir. Bunları kitap üzerinde yapabileceğiniz gibi defterinize de yapabilirsiniz. Bu, aynı zamanda asıl sorumluluğun size ait olduğunu da ifade etmektedir.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

Bunlar, edindiğiniz kazanımlar için ek çalışmalardır. Bu çalışmaları yaparak eksikliklerinizi tamamlayabilir; aynı zamanda, öğrendiğiniz bilgileri günlük yaşantınızda kullanarak yaşantınızı kolaylaştırabilirsiniz.


20 | 2
10 | 2
5 | 5
1
20=2².5
10³=1000
9²=81



1. ÜNİTE

SAYILAR VE İŞLEMLER

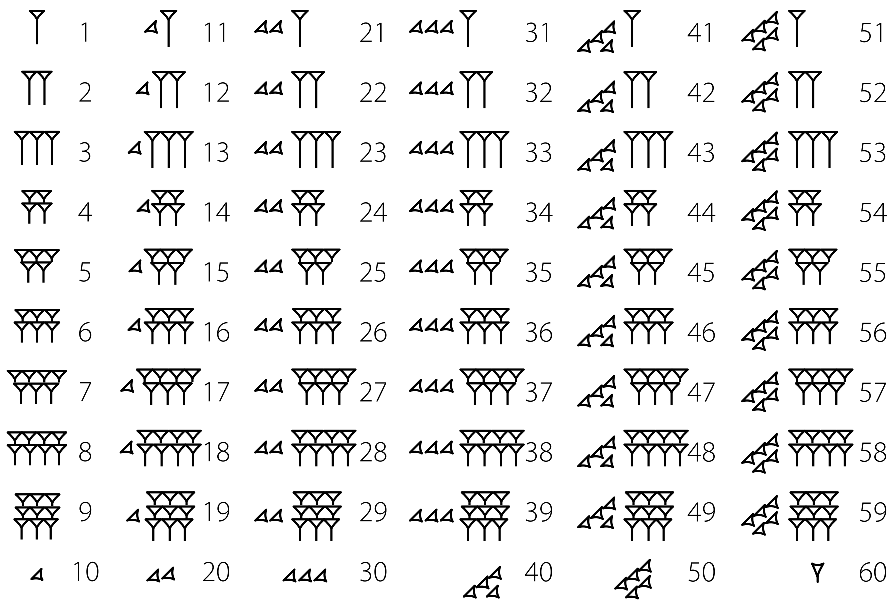
Hesap makinesi; bilgisayarlarımızın, hatta telefonlarımızın olmazsa olmaz özelliklerindendir. Onlarca rakamdan oluşan sayıları birkaç saniye içinde toplayıp, çıkarıp, çarpıp, bölüp üs alarak hayatımıza büyük bir kolaylık sağlar. Asıl ortaya çıkış amacı ticareti kolaylaştırmak olsa da hesap makineleri günümüzde eğitimde ve bilimsel araştırmalarda kullanılan önemli bir araçtır.

Dünyanın ilk mekanik hesap makinesi 1645 yılında Blaise Pascal (Bliyz Paskal) tarafından icat edilmiştir. Pascal, kral adına vergi toplama görevini yerine getiren babasına, hesapları tutmakta kolaylık sağlaması için mekanik bir hesap makinesi yapmıştır.

Bu makine, 17. yüzyıl boyunca çalışan ilk ve tek mekanik hesap makinesi olmuştur.

https://www.inonu.edu.tr

Altmış Tabanlı Konumsal Sümer Sayı Sisteminde Kullanılan Sayı Sembolleri



1.1. Bölüm

Çarpanlar ve Katlar

Sümerlerde, matematikte 60 tabanlı sayı sistemi kullanılıyordu. Neden altmış tabanlı bir sistem kullanıldığı konusunda çeşitli görüşler mevcuttur. Bir görüşe göre altmış sayısı son derece bileşik bir sayıdır çünkü tam on iki tane çarpanı vardır (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60). Altmış sayısı, ilk altı sayıya yani 1, 2, 3, 4, 5 ve 6'ya kalansız bölünebilen en küçük sayıdır. Dolayısıyla altmış tabanlı sayı sisteminde kesirlerden birçoğunu basitçe göstermek mümkün olabilmektedir. Örneğin, altmış dakikadan oluşan bir saati; otuza, yirmiye, on beşe, on ikiye, ona, altıya, beşe, dörde, üçe ve ikiye kalansız bölebilmek olanaklı hâle gelmektedir. Yine bir başka görüş, Sümerlerin saymak için baş parmak hariç dört parmağın parmak boğumlarını kullandıkları şeklindedir. Her parmakta üç boğum olduğu için toplam on iki etmektedir. Buna göre örneğin, sağ el ile tekrarlı bir şekilde on ikiye kadar sayılırken sol el ile on ikinin beşe kadar olan katları sayılmaktadır ki bu da altmış etmektedir.

http://home.ku.edu.tr

Terimler veya Kavramlar

- *En büyük ortak bölen (EBOB)*
- *En küçük ortak kat (EKOK)*

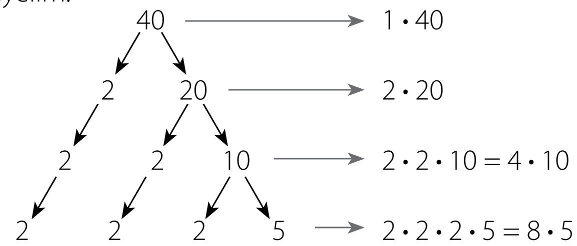
Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Pozitif tam sayıların pozitif tam sayı çarpanlarını bulma ve pozitif tam sayıların pozitif tam sayı çarpanların, üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazma*
- *İki doğal sayının en büyük ortak böleni ile en küçük ortak katını hesaplama ve ilgili problemleri çözme*
- *İki doğal sayının aralarında asal olup olmadığını belirleme*

1.1.1. Pozitif Tam Sayıları Çarpanlarına Ayırma

Hatırlayalım

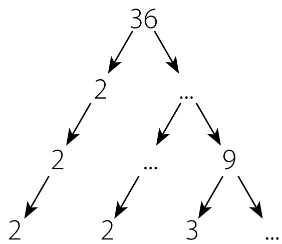
- 40'ın çarpanlarını, çarpan ağacı yöntemi ile bularak asal çarpanlarını belirleyelim.



40'ın çarpanları: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 ve 40'tır.

40'ın asal çarpanları: 2 ve 5'tir.

- Siz de 36'nın çarpanlarını ve asal çarpanlarını, çarpan ağacı yöntemi ile bularak aşağıda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.



Bilgi Kutusu

*Bir sayıyı kalansız olarak bölebilen sayılara **o sayının çarpanları** denir. O sayının çarpanları aynı zamanda bölenleridir. Örneğin; 12 sayısının çarpanları (bölenleri) 1, 2, 3, 4, 6 ve 12'dir.*

*Sadece 1'e ve kendisine bölünebilen 1'den büyük sayılara **asal sayı** denir.*

En küçük asal sayı 2'dir.

Bir eczacı, 30 adet sargı bezini satmak için paketleyecektir. Paketlerde eşit sayıda sargı bezi olacaktır. Bu durumda kaç çeşit paketleme yapılabileceğini ve bunlardan kaçının asal sayıda sargı bezi içereceğini bulalım.

30'u çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

30'un çarpanları: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ve 30'dur.

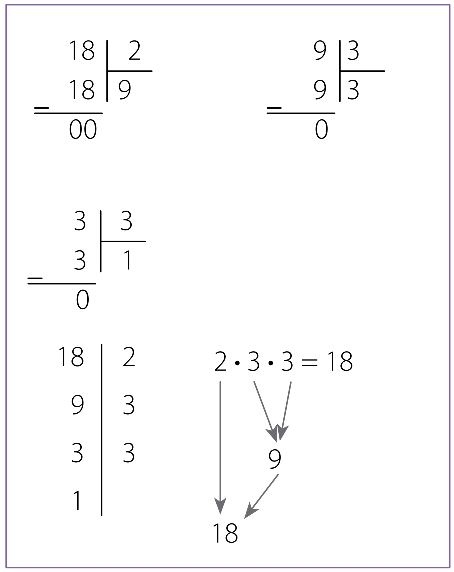
Eczacı; bir pakete 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ve 30 adet sargı bezi koyarak 8 çeşit paketleme yapabilir. Bunlardan 2, 3 ve 5 yani 3 tanesi asaldır.

Sayıların bu şekilde çarpanlarına ayrılmasına **asal çarpanlar algoritması** denir.

Etkinlik

Yandaki örneği inceleyiniz. Siz de 54 ve 60 sayıları için aynı işlem basamaklarını uygulayınız.

- Sayıyı 2'ye bölünüz. Sayı, 2'ye bölünmüyorsa 2'den büyük hangi en küçük asal sayıya bölüneceğini belirleyiniz. Sayıyı, belirlediğiniz sayıya bölünüz.
- Bölme işlemlerine, bölüm 1 olana kadar devam ediniz.
- Yaptığınız bölme işlemlerindeki bölen sayılarını yandaki gibi yan yana yazarak çarpınız.
  - ✓ Çarpma işlemi sonucunda elde ettiğiniz sayı ile başlangıçtaki sayı arasında nasıl bir ilişki vardır?



✓ Başlangıçtaki sayı ile bölen sayılar arasında nasıl bir ilişki vardır?

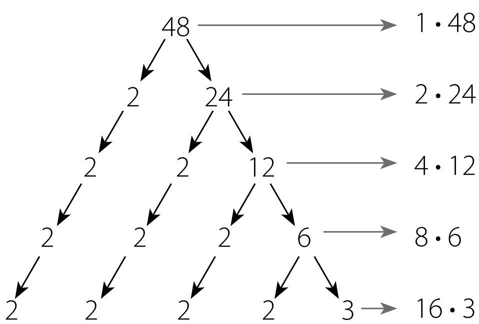
✓ Pozitif bir tam sayının çarpanları ve asal çarpanları nasıl bulunur?

1. Örnek

48 sayısının çarpanlarını bulalım.

Çözüm

48 sayısını çarpan ağacı ve asal çarpanlar algoritmasından yararlanarak çarpanlarına ayıralım.



48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

48 sayısının çarpanları: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 48'dir.

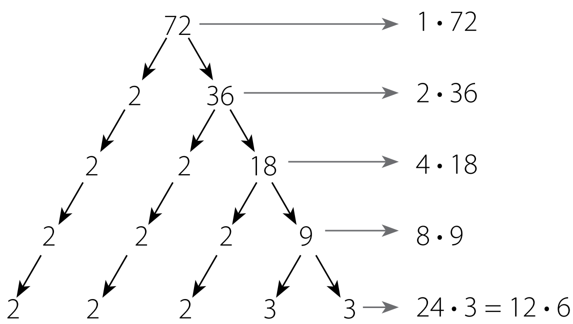
48 sayısının asal olan çarpanları ise 2 ve 3'tür.

2. Örnek

72 sayısını asal çarpanlarına ayıralım. Bu sayının asal çarpanlarını ve çarpanlarını bulalım.

Çözüm

72'nin asal çarpanlarını bulurken çarpan ağacından yararlanalım.



72'nin asal çarpanları: 2 ve 3'tür.

72'nin çarpanları: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 ve 72'dir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen sayıların asal çarpanlarını ve çarpanlarını bulunuz.

a) 125 **b)** 64 **c)** 48 **ç)** 96 **d)** 12 **e)** 18

3. Örnek

180 sayısının asal çarpanlarını bulalım ve sayıyı, üslü ifadelerin çarpımı biçiminde yazalım.

Çözüm

180'i asal çarpanlar algoritmasından yararlanarak çarpanlarına ayıralım.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

180'in asal çarpanları: 2, 3 ve 5'tir.

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Sıra Sizde

Aşağıdaki pozitif tam sayıların asal çarpanlarını bulunuz ve bu sayıları, üslü ifadelerin çarpımı biçiminde yazınız.

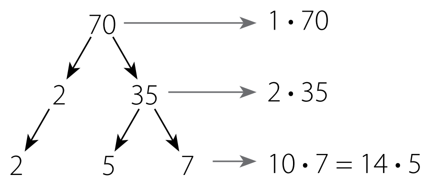
a) 98 b) 120 c) 200 ç) 288

4. Örnek

70 sayısının asal olmayan çarpanlarının sayısını bulalım.

Çözüm

70 sayısının çarpanlarını bulalım.



70 sayısının çarpanları; 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 ve 70 olmak üzere 8 tanedir.

70 sayısının asal çarpanları ise 2, 5 ve 7 olmak üzere 3 tanedir.

70 sayısının çarpanlarının sayısından, asal çarpanlarının sayısını çıkarırsak asal olmayan çarpanlarının sayısını buluruz.

70 sayısının 8 – 3 = 5 tane asal olmayan çarpanı vardır.

Sıra Sizde

126 sayısının asal olmayan çarpanlarının sayısını bulunuz.

5. Örnek

Asal çarpanlarına ayrılmış hâli $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ olan sayıyı bulalım.

Çözüm

$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ çarpımını yapıp sayıyı bulalım.

$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 4 \cdot 3 \cdot 25 = 300$ bulunur.

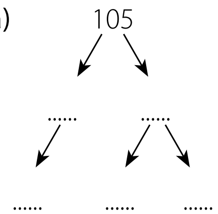
Sıra Sizde

Asal çarpanlarına ayrılmış hâli $2^2 \cdot 7 \cdot 5$ olan sayıyı bulunuz.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

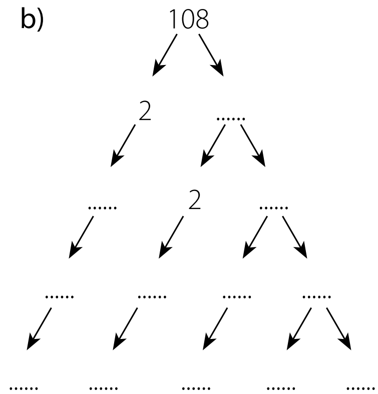
1. Aşağıdaki çarpan ağaçlarında boş bırakılan yerleri tamamlayarak sayıların asal çarpanlarını yazınız.

a)



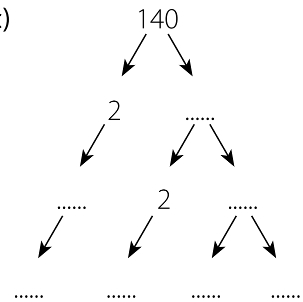
105 = ...

b)



108 = ...

c)



140 = ...

2. 320 sayısının asal ve asal olmayan çarpanlarını bulunuz.

3. Aşağıda verilen sayıları asal çarpanlar algoritmasından yararlanarak çarpanlarına ayırınız.

a) 200 b) 294 c) 189

4. Aşağıda verilen sayıları çarpanlarına ayırıp üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazınız.

a) 150 b) 99 c) 196

5. Üslü ifadelerin çarpımı şeklinde verilen sayıları bulunuz.

a) $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = \ldots\ldots$ b) $3^2 \cdot 7 = \ldots\ldots$ c) $5 \cdot 7^2 = \ldots\ldots$ ç) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 = \ldots\ldots$

6. Aşağıda verilen sayıların çarpanlarını bulunuz.

a) 32 b) 28 c) 15 ç) 11

7. 60 sayısının asal olmayan kaç tane çarpanı vardır?

8. Aşağıdaki ifadelerde noktalı yerleri tamamlayınız.

a) $80 = 2^{\cdots} \cdot 5$ b) $270 = 2 \cdot 3^{\cdots} \cdot 5$ c) $400 = 2^{\cdots} \cdot 5$

1.1.2. En Büyük Ortak Bölen (EBOB) ve En Küçük Ortak Kat (EKOK)

En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

Bilgi Kutusu

Sıfırdan farklı en az iki doğal sayının ortak bölenlerinin en büyük olanına bu sayıların ***en büyük ortak böleni*** *denir. Bu, kısaca EBOB biçiminde gösterilir.*

48 ile 36 sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğünü bulalım. Bunun için önce 48 ve 36'yı çarpanlarına ayıralım:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$48 = 2^4 \cdot 3$ $\qquad$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$

48'in bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 ve 48'dir.

36'nın bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ve 36'dır.

48 ve 36'nın ortak bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6 ve 12'dir. Ortak bölenlerin en büyüğü 12'dir. 48 ve 36 doğal sayılarının ikisini de bölen en büyük sayı 12'dir.

EBOB(48, 36) = 12'dir.

Doğal sayıların EBOB'unu bulurken farklı yollar kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıdaki örneklerde açıklanmıştır:

1. Örnek

Aşağıdaki doğal sayı çiftlerinin EBOB'larını bulalım.

a) 24 ve 40 $\qquad$ **b)** 45 ve 42

Çözüm

Sayıları asal çarpanlarına ayıralım ve üslü ifadelerin çarpımı biçiminde yazalım. Tabanları aynı olan üslü çarpanlardan üsleri eşit ya da küçük olan çarpanlar, ortak çarpandır. Ortak çarpanları çarparak sayıların EBOB değerini bulalım.

a)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3 \cdot 3$

$40 = 2^3 \cdot 5$

EBOB(24, 40) = $2^3 = 8$ (Ortak çarpanların üsleri eşit olduğu için bir tanesini aldık.)

b)

45	3		42	2
15	3		21	3
5	5		7	7
1			1	

$45 = 3^2 \cdot 5$
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
EBOB(45, 42) = 3 (Ortak çarpanların üsleri farklı olduğu için üssü küçük olanı aldık.)

Sıra Sizde

Aşağıdaki doğal sayı çiftlerinin EBOB'larını bulunuz.

a) 120 ve 150 **b)** 96 ve 72 **c)** 75 ve 100

2. Örnek

20 ve 28 doğal sayılarının EBOB'larını bulalım.

Çözüm

İki sayıyı yan yana yazarak asal çarpanlarına ayıralım. Her iki sayıyı aynı anda bölen asal sayıları işaretleyelim. İşaretlenen asal sayıların çarpımı EBOB değeridir.

20	28	2*
10	14	2*
5	7	5
1	7	7
1	1	

EBOB(20, 28) = 2 • 2 = 4 bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki doğal sayı çiftlerinin EBOB'larını bulunuz.

a) 74 ve 48 **b)** 120 ve 180 **c)** 90 ve 60

Etkinlik

Araç ve Gereç: yüzlük tablo, renkli kalemler

- Yüzlük tabloda 32 ve 48'in bölenlerini farklı renkteki kalemlerle tarayınız. Tabloda oluşan renk örüntüsünü inceleyiniz.
  - ✓ İki renkte de taranan sayılar arasında nasıl bir ilişki vardır?
  - ✓ 32 ve 48'in ortak bölenlerinin en büyüğü kaçtır?

En Küçük Ortak Kat (EKOK)

18 ile 12 sayılarının ortak katlarının en küçüğünü bulalım. Bunun için önce 18 ve 12'nin katlarını yazalım.

18'in katları: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, ...

12'nin katları: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, ...

18 ve 12'nin ortak katları: 36, 72, 108, ...

Ortak katların en küçüğü 36'dır. 36 hem 18 hem de 12'ye bölünebilen en küçük doğal sayıdır.

EKOK(18, 12) = 36'dır.

Doğal sayıların EKOK'unu bulurken farklı yollar kullanılır. Bunlardan bazıları aşağıdaki örneklerde açıklanmıştır:

Bilgi Kutusu

Sıfırdan farklı en az iki doğal sayının ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların ***en küçük ortak katı*** *denir. Bu, kısaca EKOK biçiminde gösterilir.*

1. Örnek

Aşağıdaki doğal sayı çiftlerinin EKOK'larını bulalım.

a) 24 ve 40 **b)** 45 ve 42

Çözüm

Sayıları asal çarpanlarına ayıralım ve üslü ifadelerin çarpımı biçiminde yazalım. Tabanları aynı olan üslü çarpanlardan üsleri eşit ya da büyük olan çarpanlar, ortak çarpandır. Ortak çarpanları ve ortak olmayan çarpanları çarparak sayıların EKOK değerini bulalım.

a)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3 \cdot 3$

$40 = 2^3 \cdot 5$

EKOK(24, 40) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ (Ortak çarpanların üssü eşit olduğu için bir tanesini ve ortak olmayan çarpanları aldık.)

b)

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$45 = 3^2 \cdot 5$

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

EKOK(45, 42) = $3^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 360$ (Ortak çarpanların üsleri farklı olduğu için büyük olanı ve ortak olmayan çarpanları aldık.)

Sıra Sizde

Aşağıdaki doğal sayı çiftlerinin EKOK'larını bulunuz.

a) 150 ve 100 **b)** 72 ve 96 **c)** 75 ve 180

2. Örnek

30 ve 54 doğal sayılarının EKOK'unu bulalım.

Çözüm

İki sayıyı yan yana yazarak asal çarpanlarına ayıralım. Bulunan asal sayıların tümünün çarpımı EKOK değeridir.

30	54	2
15	27	3
5	9	3
5	3	3
5	1	5
1	1	

EKOK(30, 54) $= 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$ bulunur.

3. Örnek

45 ve 60 doğal sayılarının EBOB ve EKOK'unu bulalım.

Çözüm

İki sayıyı yan yana yazarak asal çarpanlarına ayıralım. Bulunan asal sayılardan işaretli olanların çarpımı EBOB, tümünün çarpımı ise EKOK değeridir.

45	60	2
45	30	2
45	15	3*
15	5	3
5	5	5*
1	1	

EBOB(45, 60) $= 3 \cdot 5 = 15$

EKOK(45, 60) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ bulunur.

4. Örnek

EBOB(24, 48) + EKOK(8, 10) işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

24 ve 48 sayılarının EBOB'unu; 8 ve 10 sayılarının EKOK'unu bulalım. Bunun için sayıları asal çarpanlarına ayıralım.

24	48	2*
12	24	2*
6	12	2*
3	6	2
3	3	3*
1	1	

8	10	2
4	5	2
2	5	2
1	5	5
1	1	

EBOB(24, 48) $= 2^3 \cdot 3 = 24$ bulunur.

EKOK(8, 10) $= 2^3 \cdot 5 = 40$ bulunur.

O hâlde EBOB(24, 48) + EKOK(8, 10) $= 24 + 40 = 64$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen sayı çiftlerinin EBOB ve EKOK'larını bulunuz.

a) 28 ve 30 **b)** 50 ve 75 **c)** 180 ve 200

5. Örnek

24 ve 40 sayılarının EBOB ve EKOK'unu bulalım. Sayıların çarpımı ile EKOK ve EBOB'un çarpımı arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

İki sayıyı yan yana yazarak asal çarpanlarına ayıralım. İşaretlenen asal sayıların çarpımı EBOB, tüm asal sayıların çarpımı EKOK değeridir.

24	40	2*
12	20	2*
6	10	2*
3	5	3
1	5	5
1	1	

EBOB(24, 40) = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

EKOK(24, 40) = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ bulunur.

24 ile 40 sayılarının çarpımı 960'tır.

EKOK(24, 40) • EBOB(24, 40) = $120 \cdot 8 = 960$ olur.

6. Örnek

İki sayının EBOB'u 3, EKOK'u 360'tır. Sayılardan biri 24 ise diğer sayıyı bulalım.

Çözüm

İki sayının çarpımı, bu sayıların EBOB'u ile EKOK'unun çarpımına eşittir. O hâlde önce EBOB ile EKOK'un çarpımını bulalım. Sonra sayılardan biri olan 24'e bölelim.

$360 \cdot 3 = 1080$ $\quad$ $1080 \div 24 = 45$ bulunur.

O hâlde EBOB'u 3, EKOK'u 360 olan sayılar 24 ve 45'tir.

Bilgi Kutusu

İki sayının çarpımı, bu sayıların EBOB'u ile EKOK'unun çarpımına eşittir.

7. Örnek

Toplamları 30 olan iki sayının en küçük ortak katı 36'dır. Buna göre bu sayıları bulalım.

Çözüm

İki sayının EKOK'u 36 olduğuna göre bu iki sayı 36'yı tam böler. 36'nın bölenleri 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36'dır. Bu sayılardan toplamları 30 olan sayılar 12 ve 18'dir.

8. Örnek

12 ve 20 sayıları ile bölündüğünde her iki bölümde de 2 kalanını veren en küçük pozitif sayının rakamları toplamını bulalım.

Çözüm

12 ve 20 sayıları ile bölündüğünde her iki bölümde de 2 kalanını veren en küçük pozitif sayı, bu iki sayının EKOK'unun 2 fazlasıdır. Önce 12 ve 20 sayılarının EKOK'unu bulalım. Sonra 2 ekleyelim.

$$\begin{array}{cc|c} 12 & 20 & 2 \\ 6 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

EKOK(12, 20) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$'tır. $60 + 2 = 62$ bulunur.

62'nin rakamları toplamı $6 + 2 = 8$'dir.

Sıra Sizde

8 ve 17 sayıları ile bölündüğünde her iki bölümde de 5 kalanını veren en küçük pozitif sayıyı bulunuz.

9. Örnek

6 ile bölündüğünde 5, 8 ile bölündüğünde 7 kalanını veren en küçük sayıyı bulalım.

Çözüm

Bu sayı 6 ile bölündüğünde 5 kalanını veriyor.

$5 + 1 = 6$'dır.

Bu sayı 8 ile bölündüğünde 7 kalanını veriyor.

$7 + 1 = 8$'dir.

O hâlde bu sayıya 1 eklediğimizde 6 ve 8 ile tam bölünür.

6 ve 8'in EKOK'unu bulalım.

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

EKOK(6, 8) = $2^3 \cdot 3 = 24$ olur.

Bu sayıya 1 eklediğimizde 24 oluyor. 24, 6 ve 8'e tam bölünür.

O hâlde 24'ten 1 çıkaralım.

$24 - 1 = 23$

6 ile bölündüğünde 5 kalanını, 8 ile bölündüğünde 7 kalanını veren en küçük sayı 23'tür.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen sayı çiftlerinin EBOB ve EKOK'larını bulunuz.

a) 36 ve 48 **b)** 15 ve 25 **c)** 12 ve 25

2. Aşağıda çarpanlarına ayrılmış şekilde verilen sayıların EBOB ve EKOK'larını yazınız.

a) $A = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$B = 2^2 \cdot 7$

b) $C = 2 \cdot 3^2$
$D = 2^2 \cdot 3$

c) $E = 2 \cdot 5^3$
$F = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$

3. Aşağıda asal çarpanlar algoritması ile çarpanlarına ayrılan ifadelerde boş bırakılan yerleri tamamlayınız. Sayı çiftlerinin EBOB ve EKOK'larını bulunuz.

a)

30	45	......
15	......	3
......	15	......
5	5	......
1	1	

b)

......	75	2
25	......	......
......	25	......
......	......	5
1	1	

c)

60	140	......
......	......	......
......	......	3
......	35	......
......	......	......
......	1	

4. EBOB(25, 40) + EKOK(14, 16) işleminin sonucunu bulunuz.

5. İki sayının EBOB'u 9, EKOK'u 270'tır. Sayılardan biri 27 ise diğer sayıyı bulunuz.

6. Toplamları 33 olan iki sayının en küçük ortak katı 90'dır. Buna göre bu sayıları bulunuz.

7. 9 ve 15 sayıları ile bölündüğünde her iki bölümde de 3 kalanını veren en küçük pozitif sayının rakamlarının toplamını bulunuz.

8. 124 ve 180'in EKOK'u EBOB'undan kaç fazladır?

9. Aşağıdaki sayı çiftlerinden hangisinin EBOB'u 1, EKOK'u 120'dir?

A) 4 ve 12 **B)** 8 ve 42 **C)** 15 ve 8 **D)** 18 ve 16

10. EBOB(45, 98) + EKOK(45, 98) toplamının sonucu kaçtır?

En Büyük Ortak Bölen (EBOB) ve En Küçük Ortak Kat (EKOK) ile İlgili Problemler

Problem çözme, günlük yaşantımızın her yönünü ilgilendiren bir düşünme biçimidir. Problem çözme becerisi bize, özgür düşünme gücü kazandırır. Özgür düşünen birey, çok yönlü ve mantıklı düşünmeyi öğrenir. Böylece yaratıcılık özelliklerine sahip olabilir.

Karmaşık ve karşılıklı ilişkiler içeren bütün problemleri, etkili bir şekilde çözmeye yarayacak tek bir yöntem yoktur. Ancak aşağıdaki tablo, problem çözme sürecini bilinçli hâle getirmenizde size yardımcı olacaktır.

Tablo: Problem Çözme Kılavuzu

1. Problemi Anlayalım

- Problemi kurallara uygun şekilde okuyunuz.
- Problemde geçen anlamını bilmediğiniz kelimelerin anlamını sözlükten bulunuz. Bu kelimelerle yeni cümleler oluşturunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve istenenleri belirleyiniz.
- Problemi özet olarak yazınız.
- Probleme uygun şekil ya da şema çiziniz.

2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemini kullanmalısınız? Gerekçeleri ile açıklayınız.
- Probleme ait matematik cümlesini yazınız.

3. Planı Uygulayalım

- Problemin matematik cümlesi ya da cümlelerinden yararlanarak sonucunu bulunuz.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edeniz ve çözümü doğru yaptığınızdan emin olunuz.

1. Problem

Enleri eşit olan 24 ve 32 m uzunluğundaki iki parça kumaş, birbirine eşit en uzun parçalara ayrılarak ihtiyaç sahiplerine dağıtılacaktır. Kaç kişiye kumaş verilebilir?

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

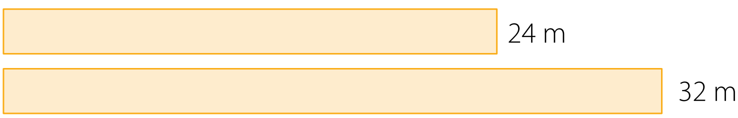
- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemde geçen anlamını bilmediğiniz kelimelerin anlamını sözlükten bulunuz. Bu kelimelerle yeni cümleler oluşturunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve istenenleri belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Kumaşların uzunlukları: 24 m ve 32 m	Birbirine eşit en uzun kaç parça elde edileceği: ?

- Problemi özet olarak yazalım.

1. kumaşın uzunluğu	2. kumaşın uzunluğu	Kumaşların uzunluklarının EBOB'u	1. kumaşın ayrılacağı parça sayısı	2. kumaşın ayrılacağı parça sayısı	Toplam parça sayısı
24 m	32 m	?	?	?	?

- Problemin şemasını çizelim.



2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemlerini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  Kumaşları eşit ve en uzun parçalara ayırabilmek için her iki uzunluğu da bölen en büyük sayıyı bulmalıyız. Bunun için EBOB'dan yararlanırız. Kumaşların kaçar parçaya ayrılacağını bulmak için bölme işlemini, toplam parça sayısını bulmak için ise toplama işlemini kullanırız.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

  EBOB(24, 32) = △

  24 : △ = ○

  32 : △ = ☆

  ○ + ☆ = ☺

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

24 ve 32 sayılarının EBOB'unu bulalım.

24	32	2*
12	16	2*
6	8	2*
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

EBOB(24, 32) = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$'dir.

Kumaş, 8 m'lik parçalara ayrılacaktır. Her iki kumaşın kaç parçaya ayrılacağını bulalım.

24 : 8 = 3 parçaya ayrılır.

32 : 8 = 4 parçaya ayrılır.

Toplam parça sayısı: 3 + 4 =7 olur. Kumaşlar 7 kişiye dağıtılabilir.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

Toplam kumaş, 24 + 32 = 56 m'dir.

Toplam parça sayısı 7 olduğuna göre 56 : 7 = 8 m bulunur.

Parçalar sekizer metredir. O hâlde bulduğumuz sonuç doğrudur.

2. Problem

Aynı taburdaki iki askerden biri 4 günde bir, diğeri 6 günde bir nöbet tutmaktadır. Bu iki asker birlikte, 1 Eylül 2019'da nöbet tuttular. Bundan sonra ilk olarak hangi tarihte birlikte nöbet tutarlar?

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemde geçen anlamını bilmediğiniz kelimelerin anlamını sözlükten bulunuz. Bu kelimelerle yeni cümleler oluşturunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve istenenleri belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Askerlerin nöbet sıklıkları: 4 ve 6 gün Birlikte nöbet tutulan ilk tarih: 1 Eylül 2019	Birlikte tuttukları nöbetten sonra ilk olarak birlikte nöbet tutulacak tarih: ?

- Problemi özet olarak yazalım.

İlk askerin nöbet sıklığı	Diğer askerin nöbet sıklığı	4 ve 6’nın EKOK’u	Birlikte nöbet tutulan ilk tarih	Tekrar birlikte nöbet tutacakları tarih
4	6	?	1 Eylül 2019	?

- Problemin şemasını çizelim.

4				4				4				4				4				4			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

6						6						6						6					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemlerini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  4 ve 6’nın EKOK’unu bulmak için bölme ve çarpmadan yararlanırız.
- Problemin matematik cümlesini yazalım.

  EKOK(4, 6) = $\triangle$

  Birlikte nöbet tutulan ilk tarih: 1 Eylül 2019

  Tekrar birlikte nöbet tutulacak ilk tarih: 1 + $\triangle$ = ☆

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

  4 ve 6’nın EKOK’unu bulalım.

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

EKOK(4, 6) = 2 • 2 • 3 = 12 günde bir, birlikte nöbet tutarlar.

İlk olarak 1 Eylül'de birlikte nöbet tuttukları için tekrar 1 + 12 = 13 Eylül 2019'da birlikte nöbet tutarlar.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

  Takvim üzerinde nöbet günlerini farklı renkte kalemle işaretleyelim ve çakışan günleri belirleyelim.

Pzt	S	Ç	Pe	C	Cmt	Pa
						1✓
2	3	4	5✓	6	7	8
9✓	10	11	12	13✓	14	15
16	17✓	18	19	20	21✓	22
23	24	25✓	26	27	28	29✓
30						

Nöbetler, 13 ve 25. günlerde çakışır. Ama tekrar birlikte tutacakları ilk nöbet sorulduğu için 13 Eylül günü alınır. Bu durumda bulunan sonuç doğrudur.

3. Problem

Ayşe, sepetteki yumurtaları üçer ve dörder saydığında her defasında 1 adet yumurta artıyor. Sepetteki yumurta sayısının 30'dan fazla olduğu bilindiğine göre sepette en az kaç yumurta vardır?

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemde geçen anlamını bilmediğiniz kelimelerin anlamını sözlükten bulunuz. Bu kelimelerle yeni cümleler oluşturunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve isteneni belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Yumurtaların kaçar kaçar sayıldığı: 3 ve 4 Sepetteki yumurta sayısı: 30'dan fazla	Sepette en az kaç yumurta olduğu: ?

- Problemin şemasını çizelim.

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	+1

4	4	4	4	4	4	4	4	4	+1

2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  Yumurtalar, üçer ve dörder sayıldığına göre 3 ve 4'ün EKOK'unu bulmalıyız. Yumurta sayısı 30'dan fazla olduğundan ve sepette en az kaç yumurta olduğu sorulduğundan bulduğumuz EKOK değerini öyle bir sayı ile çarpmalıyız ki sonuç 30'dan büyük en küçük sayı olsun. Hep 1 yumurta arttığına göre sonuca 1 eklemeliyiz.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

EKOK(3, 4) = △

□ • △ = ○

○ + 1 = ☆

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

EKOK(3, 4) = 3 • 4 = 12'dir.

Yumurta sayısı 30'dan fazla olduğuna göre 12'nin 30'dan büyük bir katını bulalım.

12 • 3 = 36   Hep bir arttığına göre 36 + 1 = 37 bulunur.

4. Problem

İki koşucu dairesel bir pisti sırayla 12 ve 15 dakikada koşmaktadır. Aynı anda aynı yerden koşmaya başlayan iki koşucunun koşmaya başladıktan sonraki ikinci karşılaşmalarının kaç dakika sonra gerçekleşeceğini bulalım.

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemde geçen anlamını bilmediğiniz kelimelerin anlamını sözlükten bulunuz. Bu kelimelerle yeni cümleler oluşturunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve isteneni belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Koşucuların dairesel pisti koştukları süre: 12 dakika ve 15 dakika	Koşucuların ikinci defa kaç dakika sonra karşılaşacakları: ?

2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

Koşucuların kaç dakika sonra tekrar ne zaman karşılaşacaklarını bulmak için 12 ve 15'in EKOK'unu bulmalıyız. Sonra ikinci kez ne zaman karşılaşacaklarını bulmak için çarpma işlemini kullanmalıyız.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

EKOK(12, 15) = △

Koşucuların ikinci kez karşılaştıkları zaman = 2 • △

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

EKOK(12, 15) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$'tır.

Koşucular 60 dakika sonra tekrar karşılaşırlar.

$2 \cdot 60 = 120$ dakika

Koşucular 120 dakika sonra ikinci kez karşılaşırlar.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

Aşağıdaki problemleri; yukarıda verilen problem çözme sürecindeki adımları izleyerek çözünüz.

1. Aynı anda hareket eden iki gemiden birincisi 7, ikincisi 9 günde bir sefere çıkmaktadır. Bu iki gemi, ilk kez birlikte hareket ettikten en az kaç gün sonra tekrar birlikte hareket eder?

2. Boyutları 9 cm ve 15 cm olan dikdörtgenlerden bir kare yapılmak isteniyor. En az kaç tane dikdörtgene ihtiyaç vardır?

3. 72 kg fasulye ve 108 kg nohut, eşit hacimlerdeki poşetlere doldurulacaktır. Fasulye ve nohut birbirine karıştırılmayacak ve hiç artmayacak şekilde en az kaç poşete doldurulabilir?

4. Bir okulun öğrencileri sekizer ve onarlı gruplandığında hep 5 öğrenci açıkta kalıyor. Okuldaki öğrenci sayısının 300'den fazla olduğu bilindiğine göre okulun mevcudu en az kaçtır?

5. 453 sayısından en az kaç çıkaralım ki elde edilen sayı 15 ve 18 ile tam bölünebilsin?

6. 9 ve 12'ye bölünebilen üç basamaklı en büyük sayı kaçtır?

7. İki otomatik zil 35 dakika ve 40 dakika aralıklarla çalıyor. Bu ziller, ilk kez birlikte çaldıktan en az kaç dakika sonra tekrar birlikte çalar?

8. Farklı ülkelerden gelen 64 ve 80 kişilik iki turist kafilesi bir otelde konaklayacaktır. Her odadaki turist sayısı eşit olacak ve her odada aynı dili konuşan ve aynı kültüre ait turistler kalacaktır. Bunun için en az kaç oda gereklidir?

9. 45 kişilik bir topluluğa en az kaç kişi daha eklenirse yeni oluşan topluluk hem altışarlı hem beşerli gruplara ayrılabilir?

10. Kenar uzunlukları 42 cm ve 36 m olan bir bahçenin etrafına, eşit aralıklarla ve köşelerine de gelecek şekilde ağaç dikilecektir. Bunun için en az kaç ağaç gereklidir?

1.1.3. Aralarında Asal Sayılar

Aşağıdaki sayı çiftlerinin ortak çarpanlarını bulalım.

a) 4 ve 9

4'ün çarpanları: 1, 2, 4

9'un çarpanları: 1, 3, 9

4 ve 9'un ortak çarpanı: 1'dir.

b) 12 ve 25

12'nin çarpanları: 1, 2, 3, 4, 6, 12

25'in çarpanları: 1, 5, 25

12 ve 25'in ortak çarpanı: 1'dir.

c) 11 ve 23

11'in çarpanları: 1, 11

23'ün çarpanları: 1, 23

11 ve 23'ün ortak çarpanı: 1'dir.

ç) 13 ve 8

13'ün çarpanları: 1, 13

8'in çarpanları: 1, 2, 4, 8

13 ve 8'in ortak çarpanı: 1'dir.

Bilgi Kutusu

*1'den başka ortak çarpanı (böleni) olmayan doğal sayı çiftlerine **aralarında asal sayılar** denir.*

Yukarıdaki sayı çiftlerinin ortak çarpanı 1'dir. Bu sayı çiftleri, aralarında asaldır. Bu sayılardan 11, 13 ve 23 asal sayıdır. 4, 8, 9, 12 ve 25 ise asal sayı değildir. Aralarında asal sayı çiftlerinden biri ya da ikisi birden asal olabilir. Ancak asal olmayan herhangi iki sayı da aralarında asal olabilir.

1. Örnek

Aşağıdaki sayı çiftlerinden aralarında asal olanları belirleyelim.

a) 5 ve 7 **b)** 6 ve 10 **c)** 15 ve 16

Çözüm

Sayı çiftlerinin 1'den başka ortak çarpanları varsa bulalım.

a) 5 ve 7 asal sayılardır. Bu nedenle 5 ve 7 sayıları, aralarında asaldır.

b) 6'nın çarpanları: 1, 2, 3 ve 6; 10'un çarpanları: 1, 2, 5 ve 10'dur.

6 ve 10'un ortak çarpanları: 1 ve 2'dir.

6 ve 10 sayıları 1'den başka ortak çarpana sahip olduğundan aralarında asal değildir.

c) 15'in çarpanları: 1, 3, 5 ve 15; 16'nın çarpanları: 1, 2, 4, 8 ve 16'dır.

15 ve 16 sayıları, 1'den başka ortak çarpanları olmadığından aralarında asaldır.
15 ve 16 ardışık sayılardır.

Bilgi Kutusu

Tüm asal sayılar, aralarında asaldır.

2. Örnek

a ve b, aralarında asal sayılardır. $\frac{a}{b} = \frac{36}{42}$ olduğuna göre a + b toplamını bulalım.

Çözüm

a ve b, aralarında asal sayılar olduğuna göre 36 ve 42'yi 6 ile sadeleştirelim. Böylece aralarında asal iki sayı elde etmiş oluruz.

$\frac{a}{b} = \frac{36}{42} = \frac{6}{7}$

O hâlde a = 6, b = 7 olur. a + b = 6 + 7 = 13 bulunur.

3. Örnek

a + 1 ve b – 3 aralarında asal sayılardır. $\frac{a+1}{b-3} = \frac{15}{21}$ olduğuna göre a + b'yi bulalım.

Çözüm

a + 1 ve b – 3 aralarında asal sayılar olduğuna göre $\frac{15}{21}$'i sadeleştirelim.

$\frac{a+1}{b-3} = \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{21}^{7}} = \frac{5}{7}$

O hâlde a + 1 = 5 ve b – 3 = 7'dir. Buradan a = 4 ve b = 10 bulunur. a + b = 4 + 10 = 14'tür.

4. Örnek

Çarpımları 40 olan doğal sayı çiftlerinden aralarında asal olanları bulalım.

Çözüm

Çarpımı 40 olan sayıları yazalım.

$40 = 1 \cdot 40$
$= 2 \cdot 20$
$= 4 \cdot 10$
$= 5 \cdot 8$

1 ve 40, 2 ve 20, 4 ve 10, 5 ve 8 doğal sayı çiftlerinden aralarında asal olanlar 1 ve 40, 5 ve 8'dir.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki ifadelerde bırakılan boşlukları tamamlayınız.

   En küçük asal sayı .... 'dir.

   Hem çift hem de asal olan tek sayı .... 'dir.

   1'den başka ortak çarpanı olmayan sayı çiftlerine .... denir.

2. Aşağıda verilen sayı çiftlerinden aralarında asal olanları belirleyiniz.

   9 ve 36 24 ve 63 15 ve 28 18 ve 49 44 ve 62 102 ve 68

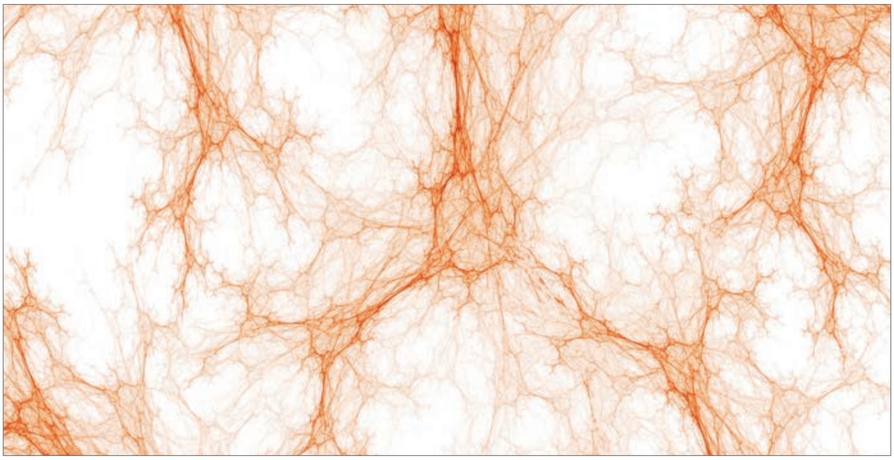
3. Aralarında asal iki sayı, x ve y olsun. $\frac{x}{y} = \frac{18}{32}$ olduğuna göre $x \cdot y$ kaçtır?

1.2. Bölüm

Üslü İfadeler

Çok büyük sayılar üslü ifadelerle gösterilebilir. Örneğin, Dünya'ya Güneş'ten sonra en yakın yıldız 37 800 000 000 000 km = $378 \cdot 10^{11}$ km uzaklıktadır.

http://rasathane.ankara.edu.tr



Çok küçük sayılar üslü ifadelerle gösterilebilir. Bir kılcal damarın çapı 0,000003 m = $3 \cdot 10^{-6}$ m'dir.

www.biyolojiegitim.yyu.edu.tr

Terimler veya Kavramlar

- *Çok büyük sayılar*
- *Çok küçük sayılar*
- *Bilimsel gösterim*

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Tam sayıların, tam sayı kuvvetlerini hesaplama*
- *Üslü ifadelerle ilgili temel kuralları anlama ve üslü ifadelerle birbirine denk ifadeler oluşturma*
- *Sayıların ondalık gösterimini, 10'un kuvvetlerini kullanarak çözümleme*
- *Sayıları, 10'un farklı tam sayı kuvvetlerini kullanarak ifade etme*
- *Çok büyük ve çok küçük sayıları bilimsel gösterimle ifade etme ve karşılaştırma*

1.2.1. Tam Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

Hatırlayalım

1. Aşağıda verilen üslü ifadeleri, önceki bilgilerinizden ve örnekten yararlanarak doğal sayıların çarpımları biçiminde yazınız.

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $5^3 =$ ....

$10^6 =$ .... $2^5 =$ ....

2. Aşağıda verilen üslü ifadelerle değerlerini, önceki bilgilerinizden ve örnekten yararlanarak eşleştiriniz.

2^4	5^2	10^5	4^3	2^8
64	16	25	256	100 000

($4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$)

3. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

$3^3 - 2^4 =$ ...... $5^3 + 2^6 - 4^2 =$ ......

$10^3 : 5^2 + 7^2 =$ ...... $6^3 - 4^3 + 2^5 =$ ......

Aşağıdaki sayıların karelerini ve küplerini alalım:

	Sayı	Karesi	Küpü
a)	-2	$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$	$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
b)	-3	$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$	$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
c)	-4	$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$	$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

Görüldüğü gibi negatif sayıların kareleri pozitif, küpleri negatiftir. 2 çift, 3 tek sayıdır. O hâlde negatif bir tam sayının tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri pozitif tam sayılara eşittir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen sayıların karelerini ve küplerini alınız.

a) -5 b) -8 c) -10

1. Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $(-5)^3$ b) $(-3)^5$ c) $(-10)^4$

Çözüm

Sayıların tümü negatiftir. Üslere bakarak işaretlerini belirleyelim.

a) $(-5)^3 = -125$ (3, tek sayı olduğundan elde edilen sayı negatiftir.)

b) $(-3)^5 = -243$ (5, tek sayı olduğundan elde edilen sayı negatiftir.)

c) $(-10)^4 = 10\,000$ (4, çift sayı olduğundan elde edilen sayı pozitiftir.)

Bilgi Kutusu

Negatif tam sayıların tek kuvvetleri negatif, çift kuvvetleri pozitiftir.
n, sıfırdan farklı bir doğal sayı ve a, negatif bir tam sayı olmak üzere;
$a^{2n} > 0$ ve $a^{2n-1} < 0$'dır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini hesaplayarak boş bırakılan yerlere yazınız.

a) $(-2)^6 =$ ...... b) $(-5)^4 =$ ...... c) $(-3)^3 =$ ...... ç) $(-4)^3 =$ ......

2. Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) 2^{-1} b) 3^{-1} c) 2^{-2} ç) 3^{-2} d) 4^{-3} e) 3^{-4}

Çözüm

a) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ b) $3^{-1} = \frac{1}{3}$

c) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ ç) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$

d) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{64}$ e) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$ bulunur.

Bilgi Kutusu

Bir üslü ifade, paydadan paya ya da paydan paydaya alındığında üssün işareti değişir.

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$ $y^b = \frac{1}{y^{-b}}$

Sıra Sizde

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini hesaplayarak boş bırakılan yerlere yazınız.

a) $4^{-2} =$ ...... b) $6^{-3} =$ ...... c) $5^{-2} =$ ...... ç) $2^{-8} =$ ......

3. Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerinin değerlerini bulalım.

a) $(-3)^{-4}$ b) $(-6)^{-2}$ c) $(-2)^{-5}$

Çözüm

Üsleri alınacak sayıların işaretlerine ve üslerin tek sayı mı yoksa çift sayı mı olduğuna dikkat edelim.

a) $(-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$ (4, çift sayı olduğundan elde edilen sayı pozitiftir.)

b) $(-6)^{-2} = \dfrac{1}{(-6)^2} = \dfrac{1}{36}$ (2, çift sayı olduğundan elde edilen sayı pozitiftir.)

c) $(-2)^{-5} = \dfrac{1}{(-2)^5} = -\dfrac{1}{32}$ (5, tek sayı olduğundan elde edilen sayı negatiftir.)

Sıra Sizde

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini hesaplayarak boş bırakılan yerlere yazınız.

a) $(-2)^{-6} =$ ...... b) $(-5)^{-2} =$ ...... c) $(-3)^{-5} =$ ...... ç) $(-6)^{-3} =$ ......

Etkinlik

- Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz. Verilenlerden yararlanarak boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

Taban \ Üs	-3	-2	-1	1	2	3
-4	$-\dfrac{1}{64}$					
-3		$\dfrac{1}{9}$				
-2			$-\dfrac{1}{2}$			
2				2		
3	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	3	9	27
4						64

✓ Bir tam sayının pozitif tam sayı kuvveti nasıl alınır?

✓ Bir tam sayının negatif tam sayı kuvveti nasıl alınır?

4. Örnek

Aşağıda verilen sayıları üslü ifade olarak yazalım.

a) 16 b) –125 c) $\frac{1}{125}$ ç) $-\frac{1}{729}$

Çözüm

a) $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

b) $-125 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3$

c) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^{-3}$

ç) $-\frac{1}{729} = \frac{1}{(-9) \cdot (-9) \cdot (-9)} = (-9)^{-3}$

Sıra Sizde

Aşağıdaki sayıları üslü ifade olarak yazınız.

a) 32 b) –243 c) 36 ç) $\frac{1}{256}$ d) $-\frac{1}{32}$ e) $\frac{1}{49}$ f) $-\frac{1}{27}$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen üslü ifadelerin işaretlerini belirleyiniz.

a) $(-3)^{15}$ b) $(-1)^{1001}$ c) $(-1)^{2016}$ ç) 2^{53} d) $(-5)^{68}$

2. Aşağıda verilen üslü ifadeler ile bu ifadelerin değerlerini eşleştiriniz.

$(-4)^4$	$\frac{1}{16}$
$(-10)^5$	$-\frac{1}{125}$
2^{-4}	–512
$(-5)^{-3}$	256
$(-8)^3$	–100 000

3. Aşağıda verilen üslü ifadelerin değerlerini hesaplayınız.

a) $(-1)^{47}$ b) 6^3 c) $(-2)^9$ ç) 4^5 d) $(-3)^5$ e) $(-1)^{54}$

1.2.2. Üslü İfadelerin Özellikleri

Üslü ifadelerle çeşitli işlemler yapılabilir. Bu işlemlerin yapılabilmesi için bazı temel kurallar vardır. Bu kuralları bilmek ve uygulamak üslü ifadelerle yapılacak işlemleri kolaylaştıracaktır. Aşağıda bu temel kuralları sırası ile görelim ve uygulayalım:

1. Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) 5^0 b) 19^0 c) $(-10)^0$ ç) $(-3)^0$

Çözüm

a) $5^0 = 1$ b) $19^0 = 1$ c) $(-10)^0 = 1$ ç) $(-3)^0 = 1$ olur.

Bilgi Kutusu

- *Sıfır hariç bir tam sayının sıfırıncı kuvveti 1'dir.* $a^0 = 1$
- *Bütün sayıların 1. kuvveti kendisine eşittir.*

Üslü ifadelerle Çarpma İşlemi

Üslü ifadelerle çarpma işlemi yaparken iki farklı durumla karşılaşırız. Bunlardan biri sayıların tabanlarının, diğeri ise üslerinin eşit olmasıdır.

Tabanları Eşit Olan Üslü İfadelerle Çarpma İşlemi

$2^4 \cdot 2^3$ işleminin sonucunu bulalım.

$$2^4 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 tane 2}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 tane 2}}$$

$$= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{7 tane 2}}$$

$$= 2^{4+3} = 2^7$$

Bilgi Kutusu

Üslü İfadelerle İşlemlerde

1. Kural

Tabanları eşit olan iki üslü ifade çarpılırken üsler toplanır ve sonuç, tabana üs olarak yazılır; taban değişmez.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$*dir.*

2. Örnek

Aşağıda verilen üslü ifadelerin çarpma işlemlerini yapalım.

a) $3^4 \cdot 3^3$ b) $5^{-7} \cdot 5^9$ c) $7^{15} \cdot 7^{22}$ ç) $2^{-10} \cdot 2^{-13}$

Çözüm

Üslü ifadelerle işlemlerde 1. kuraldan yararlanarak üslü ifadelerde çarpma işlemlerini yapalım.

a) $3^4 \cdot 3^3 = 3^{4+3} = 3^7$

b) $5^{-7} \cdot 5^9 = 5^{-7+9} = 5^2$

c) $7^{15} \cdot 7^{22} = 7^{15+22} = 7^{37}$

ç) $2^{-10} \cdot 2^{-13} = 2^{-10+(-13)} = 2^{-23}$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen üslü ifadelerin çarpma işlemlerini yapınız.

a) $5^9 \cdot 5^{12}$ b) $6^8 \cdot 6^{-3}$ c) $4^{-9} \cdot 4^{12}$ ç) $3^2 \cdot 3^4$

Bilgi Kutusu

Üslü İfadelerle İşlemlerde

2. Kural

Üsleri eşit, tabanları farklı olan üslü ifadelerle çarpma işlemi yapılırken tabanlar çarpılır ve sonuç, taban olarak yazılır; üs değişmez.

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$dir.

Üsleri Eşit Olan Üslü İfadelerle Çarpma İşlemi

$2^5 \cdot 5^5$ üslü ifadesi ile $(2 \cdot 5)^5$ üslü ifadesinin değerini hesaplayalım.

$2^5 \cdot 5^5 = 32 \cdot 3125 = 100\,000$

$(2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000$ O hâlde $2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5$tir.

3. Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelere denk olan ifadeleri yazalım.

a) $3^6 \cdot 5^6$ b) $2^7 \cdot 7^7$ c) 6^9 ç) 14^{10}

Çözüm

Üslü ifadelerle işlemlerde 2. kuraldan yararlanarak üslü ifadelere denk olan ifadeleri yazalım.

a) $3^6 \cdot 5^6 = (3 \cdot 5)^6 = 15^6$

b) $2^7 \cdot 7^7 = (2 \cdot 7)^7 = 14^7$

c) $6^9 = (2 \cdot 3)^9 = 2^9 \cdot 3^9$

ç) $14^{10} = (2 \cdot 7)^{10} = 2^{10} \cdot 7^{10}$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki üslü ifadelere denk olan ifadeleri yazınız.

a) $4^3 \cdot 6^3$ b) 15^7 c) $5^5 \cdot 2^5$ ç) 18^9

Bilgi Kutusu

Üslü İfadelerle İşlemlerde

3. Kural

Üslü bir sayının üssü alınırken üsler çarpılıp sonuç, üs olarak yazılır; taban aynı kalır.

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$dir.

Üslü Bir Sayının Kuvvetini Alma

$(2^3)^2$ ifadesine denk olan üslü ifadeyi yazalım.

2^3ün 2. kuvveti demek, 2^3ü kendisiyle bir kez çarpmamız demektir.

$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$ bulunur.

4. Örnek

Aşağıdaki üslü ifadelere denk olan ifadeleri yazalım.

a) $(10^5)^4$ b) $(2^7)^6$ c) $(-5^3)^8$ ç) $(6^5)^2$

Çözüm

Üslü ifadelerle işlemlerde 3. kuraldan yararlanarak üslü ifadelere denk olan ifadeleri yazalım.

a) $(10^5)^4 = 10^{5 \cdot 4} = 10^{20}$

b) $(2^7)^6 = 2^{7 \cdot 6} = 2^{42}$

c) $(-5^3)^8 = 5^{24}$ (-5^3 negatif bir sayıdır. Bu sayının 8. kuvveti pozitif olur.)

ç) $(6^5)^2 = 6^{10}$

Bilgi Kutusu

Negatif bir tam sayının üssü hesaplanırken; üs parantezin dışındaysa işaretiyle beraber üssü alınır. Üs parantezin içerisindeyse işaret aynen yazılıp sadece sayının üssü alınır.
Örneğin;
$(-3)^4 = +81$*'dir.*
$(-3^4) = -81$*'dir.*

Sıra Sizde

Aşağıdaki üslü ifadelere denk olan ifadeleri yazınız.

a) $(9^3)^3$ b) $(5^2)^4$ c) $(6^8)^2$ ç) $(-2^4)^5$

Üslü İfadelerle Bölme İşlemi

Üslü ifadelerle bölme işlemi yapılırken de çarpma işleminde olduğu gibi iki farklı durumla karşılaşırız. Bunlardan biri sayıların tabanlarının, diğeri ise üslerinin eşit olmasıdır.

Tabanları Eşit Olan Üslü İfadelerle Bölme İşlemi

$\dfrac{3^8}{3^5}$ bölme işlemini yapalım.

3^8 ve 3^5 üslü ifadelerini açalım.

$$\frac{3^8}{3^5} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^3 \text{ bulunur.}$$

Bilgi Kutusu

Üslü İfadelerle İşlemlerde 4. Kural

Tabanı eşit olan üslü ifadeler bölünürken payın üssünden paydanın üssü çıkarılıp sonuç üs olarak yazılır; taban değişmez.

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$*dir.*

5. Örnek

Aşağıdaki bölme işlemlerini yaparak bu işlemlere denk olan ifadeleri bulalım.

a) $\dfrac{3^{-5}}{3^6}$ b) $\dfrac{2^9}{2^{-3}}$ c) $\dfrac{5^{-4}}{5^{-8}}$ ç) $\dfrac{10^{12}}{10^{29}}$

Çözüm

Üslü ifadelerle işlemlerde 4. kuraldan yararlanarak işlemlere denk olan ifadeleri bulalım.

a) $\dfrac{3^{-5}}{3^6} = 3^{-5-6} = 3^{-11}$

b) $\dfrac{2^9}{2^{-3}} = 2^{9-(-3)} = 2^{9+3} = 2^{12}$

c) $\dfrac{5^{-4}}{5^{-8}} = 5^{-4-(-8)} = 5^{-4+8} = 5^4$

ç) $\dfrac{10^{12}}{10^{29}} = 10^{12-29} = 10^{-17}$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki bölme işlemlerini yaparak bu işlemlere denk olan ifadeleri bulunuz.

a) $\frac{4^6}{4^5}$ b) $\frac{3^{-2}}{3^6}$ c) $\frac{2^9}{2^5}$ ç) $\frac{6^5}{6^{-2}}$

Bilgi Kutusu

Üslü ifadelerle İşlemlerde

5. Kural

$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$dir. Aynı şekilde;

$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ yazılabilir.

6. Örnek

$\frac{1}{3^4}$ işleminin denk olduğu ifadeyi bulalım.

Çözüm

$3^0 = 1$'dir. O hâlde;

$\frac{1}{3^4} = \frac{3^0}{3^4} = 3^{0-4} = 3^{-4}$ bulunur.

7. Örnek

Aşağıdaki ifadelere denk olan ifadeleri yazalım.

a) $\frac{1}{2^9}$ b) $\frac{1}{7^{-4}}$ c) 5^9 ç) 10^{-8}

Çözüm

Üslü ifadelerle işlemlerde 5. kuraldan yararlanarak üslü ifadelere denk ifadeler yazalım.

a) $\frac{1}{2^9} = 2^{-9}$ b) $\frac{1}{7^{-4}} = 7^4$ c) $5^9 = \frac{1}{5^{-9}}$ ç) $10^{-8} = \frac{1}{10^8}$

Üsleri Eşit Olan Üslü İfadelerle Bölme İşlemi

Bilgi Kutusu

Üslü İfadelerle İşlemlerde

6. Kural

Üsleri aynı olan üslü ifadeler bölünürken pay paydaya bölünüp sonuç taban olarak yazılır; üs değişmez.

$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ dir. $(b \neq 0)$

$\frac{10^4}{5^4}$ üslü ifadesi ile $\left(\frac{10}{5}\right)^4$ üslü ifadesinin değerini hesaplayalım.

$\frac{10^4}{5^4} = \frac{10\,000}{625} = 16$ bulunur.

$\left(\frac{10}{5}\right)^4 = 2^4 = 16$

O hâlde $\frac{10^4}{5^4} = \left(\frac{10}{5}\right)^4$ tür.

8. Örnek

Aşağıdaki ifadelerin denk olduğu ifadeleri yazalım.

a) $\dfrac{18^8}{3^8}$ b) $\dfrac{21^5}{7^5}$ c) $\left(\dfrac{8}{5}\right)^6$ ç) $\left(\dfrac{14}{9}\right)^{10}$

Çözüm

Üslü ifadelerle işlemlerde 6. kuraldan yararlanarak ifadelere denk ifadeler yazalım.

a) $\dfrac{18^8}{3^8} = \left(\dfrac{18}{3}\right)^8 = 6^8$

b) $\dfrac{21^5}{7^5} = \left(\dfrac{21}{7}\right)^5 = 3^5$

c) $\left(\dfrac{8}{5}\right)^6 = \dfrac{8^6}{5^6}$

ç) $\left(\dfrac{14}{9}\right)^{10} = \dfrac{14^{10}}{9^{10}}$

9. Örnek

$\dfrac{(-2)^5 \cdot 4^5}{(2^2)^3 \cdot (-2) \cdot (-2)^6}$ **işleminin sonucunu bulalım.**

Çözüm

Üslü ifadeleri, tabanları aynı olacak biçimde yazalım. Böylece tabanları aynı olan üslü ifadelerle çarpma ve bölme işlemi yapabiliriz.

$$\begin{aligned}
\frac{(-2)^5 \cdot 4^5}{(2^2)^3 \cdot (-2) \cdot (-2)^6} &= \frac{(-2)^5 \cdot (2^2)^5}{2^6 \cdot (-2) \cdot (-2)^6} \\
&= \frac{-2^5 \cdot 2^{10}}{2^6 \cdot (-2) \cdot 2^6} \\
&= \frac{-2^{5+10}}{-2^{6+1+6}} \\
&= \frac{-2^{15}}{-2^{13}} \\
&= 2^{15-13} \\
&= 2^2 \\
&= 4 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

10. Örnek

$\dfrac{125^4 \cdot 9^7}{(-5)^6 \cdot 3^8}$ **işleminin en sade hâlini bulalım.**

Çözüm

Üslü ifadelerle ilgili temel kurallardan yararlanalım.

$$\frac{125^4 \cdot 9^7}{(-5)^6 \cdot 3^8} = \frac{(5^3)^4 \cdot (3^2)^7}{5^6 \cdot 3^8}$$
$$= \frac{5^{12} \cdot 3^{14}}{5^6 \cdot 3^8}$$
$$= 5^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{-6} \cdot 3^{-8}$$
$$= 5^{12-6} \cdot 3^{14-8}$$
$$= 5^6 \cdot 3^6$$
$$= (5 \cdot 3)^6$$
$= 15^6$ bulunur.

11. Örnek

$64^5 \cdot (-256)^{-4}$ işleminin en sade hâlini bulalım.

Çözüm

64 ve 256 sayıları 2'nin kuvvetidir. Üslü ifadelerin tabanlarını aynı yapalım.

$$64^5 \cdot (-256)^{-4} = \frac{(2^6)^5}{(-2^8)^4}$$
$$= \frac{2^{30}}{2^{32}}$$
$$= 2^{30-32}$$
$$= 2^{-2}$$
$= \dfrac{1}{4}$ bulunur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki işlemlere denk olan ifadeler yazınız.

a) $2^{-10} \cdot 2^8$ b) $3^{-12} \cdot 9^4$ c) $\dfrac{5^9}{5^{11}}$ ç) $3^6 \cdot 2^6$

d) $(7^4)^3$ e) $(-5)^4$ f) 3^{-4} g) 4^{-7}

2. Aşağıdaki üslü ifadelerin işaretlerini belirleyiniz.

a) $(-7)^{15}$ b) 3^{23} c) $(-11)^{104}$ ç) $(-3)^{19}$

3. Aşağıdaki üslü ifadelerin değerlerini hesaplayınız.

a) 2^{-5} b) $(-7)^{3}$ c) 9^{0} ç) $\frac{1}{3^{-5}}$

d) $(-9)^{3}$ e) $(1^{8})^{9}$ f) $(5^{6})^{0}$ g) $(7^{0})^{5}$

4. Aşağıdaki işlemlerin en sade hâlini bulunuz.

a) $3^4 \cdot 81^5 \cdot (3^3)^6$ b) $\frac{2^8 \cdot (-2)^9}{-4^{13}}$ c) $125^4 : 5^{-6}$

ç) $2^8 \cdot 5^8$ d) $3^{-1} \cdot (3^7 : 3^4)$ e) $512 : 2^5$

5. $\frac{10^3 \cdot 2^5}{5^3 \cdot 16}$ işleminin en sade hâli nedir?

6. $A = 5^9$ $B = 125^{-6}$ $C = (5^{-2})^3$ ise $\frac{A \cdot B}{C}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 125 B) $-\frac{1}{25}$ C) $\frac{1}{125}$ D) -25

7. $\frac{(-2)^4 + 2^5 + (-3)^3}{-3^{-1}}$ işleminin sonucu kaçtır?

8. $\left[\left(\frac{-1}{5}\right)^5\right]^{-6}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{5^{30}}$ B) $-\frac{1}{5^{30}}$ C) -5^{30} D) 5^{30}

9. $A = \left(\frac{1}{49}\right)^5$ $B = (-7^{-1})^{-6}$ ise $\frac{A}{B}$ işleminin sonucu kaçtır?

10. Aşağıdaki eşitliklerden doğru olanların başındaki kutucuğa "D", yanlış olanların başındaki kutucuğa "Y" yazınız.

☐ $2^3 + 2^5 = 2^8$ ☐ $3^5 = 5^3$ ☐ $5^3 \cdot 5^3 = 25^6$

☐ $3 \cdot 3^7 = 97$ ☐ $3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = 3^4$ ☐ $\left(\frac{125}{5^2}\right)^{-2} = \frac{1}{25}$

1.2.3. Ondalık Gösterimle Verilen Sayıları Çözümleme

58,367 sayısını üslü ifadelerden yararlanarak çözümleyelim.

$58{,}367 = 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}01 + 7 \cdot 0{,}001$

Ondalık gösterimi verilen sayıları kesir olarak yazalım.

$58{,}367 = 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} + 7 \cdot \frac{1}{1000}$

Kesir sayılarını üslü ifade olarak yazalım.

$58{,}367 = 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$

O hâlde ondalık gösterimi verilen sayılar, 10 sayısının pozitif ve negatif tam sayı kuvvetleri kullanılarak çözümlenebilir.

1. Örnek

Aşağıda verilen sayıları 10'un tam sayı kuvvetlerini kullanarak çözümleyelim.

a) 0,15 **b)** 2,204

Çözüm

a) $0{,}15 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100}$

$0{,}15 = 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$

b) $2{,}204 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 4 \cdot \frac{1}{1000}$

$2{,}204 = 2 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

Sıra Sizde

Aşağıdaki sayıları 10'un tam sayı kuvvetlerini kullanarak çözümleyiniz.

a) 2,105 **b)** 0,367 **c)** 24,13 **ç)** 452,9 **d)** 206,06

2. Örnek

Aşağıdaki çözümlenmiş sayıların ondalık gösterimini yazalım.

a) $4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$

b) $1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$

Çözüm

Önce üslü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} = 4 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100}$

$= 46{,}82$

b) $1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000}$

$= 1{,}003$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki ondalık sayıları, 10’un tam sayı kuvvetlerini kullanarak çözümleyiniz.

a) 12,5 = ...

b) 1,324 = ...

c) 0,309 = ...

2. Aşağıda çözümlenmiş olarak verilen sayıların ondalık gösterimini yazınız.

a) $5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} =$ ....

b) $6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} =$ ....

c) $1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} =$ ....

1.2.4. Sayıları, 10’un Tam Sayı Kuvvetlerini Kullanarak İfade Etme

Büyük sayıları yazmak için üslü ifadeler kullanılabilir.

$10 = 10^1$

$10 \times 10 = 10^2 = 100$

$10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$

$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\ 000$

Üslü ifadeleri kullanarak 1 000 000 000 (1 milyar) sayısını kısaca 10^9 olarak yazabiliriz. Elbette tüm sayılar 10’un katı olmak zorunda değildir. Ancak 10’un kuvveti olan sayıların bu yazılış tarzını bilmek işimizi oldukça kolaylaştırır.

893 000 000 sayısını 10’un farklı tam sayı kuvvetlerini kullanarak gösterelim.

$893 \cdot 10^6$ $\qquad$ $89{,}3 \cdot 10^7$ $\qquad$ $8{,}93 \cdot 10^8$ $\qquad$ $0{,}893 \cdot 10^9$

Görüldüğü gibi sayıları 10’un kuvvetlerini kullanarak birçok şekilde gösterebiliriz. 10’un kuvvetini, 10’un katı olan tam sayının sağındaki sıfır rakamının sayısı kadar yazabiliriz. Eğer bu sayının ondalık gösterimini yazacak olursak 10’un kuvvetini virgülün sağındaki basamak sayısı kadar artırırız.

1. Örnek

120 000 sayısını 10’un farklı kuvvetlerini kullanarak yazalım.

Çözüm

$120\ 000 = 12 \cdot 10^4 \rightarrow$ 12’nin sağında 4 tane “0” vardır.

$12 \cdot 10^4 = 1{,}2 \cdot 10^5$

$12 \cdot 10^4 = 0{,}12 \cdot 10^6$

$12 \cdot 10^4 = 0{,}012 \cdot 10^7$ olur.

2. Örnek

Aşağıdaki eşitliklerde boş bırakılan yerleri tamamlayalım.

a) $5400 = 5,4 \cdot 10^{....}$ b) $81\ 200 = 8,12 \cdot 10^{....}$ c) $2\ 000\ 000 = 0,2 \cdot 10^{....}$

ç) $0,36 \cdot 10^{-4} =$ ....   d) $238 \cdot 10^{-2} =$ ....   e) $17 \cdot 10^{-3} =$ ....

Çözüm

a) $5400 = 5,4 \cdot 10^{3}$ b) $81\ 200 = 8,12 \cdot 10^{4}$ c) $2\ 000\ 000 = 0,2 \cdot 10^{7}$

ç) $0,36 \cdot 10^{-4} = 0,000036$ d) $238 \cdot 10^{-2} = 2,38$ e) $17 \cdot 10^{-3} = 0,017$

Sıra Sizde

Aşağıda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

a) $30\ 000 = 3 \cdot 10^{....}$ b) $620\ 000 = 62 \cdot 10^{....}$ c) $453\ 000 = 453 \cdot 10^{....}$

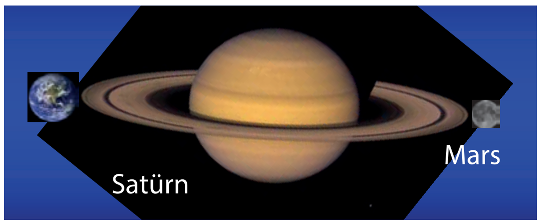
ç) $1280 = 12,8 \cdot 10^{....}$ d) $57\ 000 = 5,7 \cdot 10^{....}$ e) $43\ 600 = 0,436 \cdot 10^{....}$

f) $127 \cdot 10^{4} = ... \cdot 10^{2}$ g) $4,3 \cdot 10^{4} = ... \cdot 10^{2}$ ğ) $0,16 \cdot 10^{2} = ...$

h) $0,8 \cdot 10^{3} = ... \cdot 10^{4}$ ı) $0,128 \cdot 10^{5} = ... \cdot 10^{6}$ i) $34 \cdot 10^{6} = ... \cdot 10^{4}$

3. Örnek

Aşağıdaki ifadelerde verilen uzaklıkları gösteren doğal sayıları 10'un kuvvetlerinden yararlanarak yazalım.



a) Satürn gezegeni, yaklaşık 120 000 km'lik çapa sahiptir.

b) Satürn gezegeninin halkasının çapı 270 000 km'dir.

c) Yer-Ay uzaklığı 384 400 km'dir.

http://rasathane.ankara.edu.tr

Çözüm

a) Satürn gezegeninin çapı:
120 000 km = $1,2 \times 10^{5}$ km (ya da 12×10^{4} km ya da $0,12 \times 10^{6}$ km...)

b) Satürn'ün halkasının çapı:
270 000 km = $0,27 \times 10^{6}$ km (ya da 27×10^{4} km ya da $2,7 \times 10^{5}$ km...)

c) Yer-Ay uzaklığı:
384 400 km = $38,44 \times 10^{4}$ km (ya da $3,844 \times 10^{5}$ km ya da $384,4 \times 10^{3}$ km...) olarak yazılır.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen sayıları 10’un tam sayı kuvvetlerinden yararlanarak yazınız.

1 500 000 000	
21 000 000 000	
2000	
345 000 000	
0,00001	
0,000000000051	
0,003	
0,0000004	

2. Aşağıda verilen sayıların eşitlerini yazınız.

a) $3 \cdot 10^{8} = 0{,}3 \cdot 10^{....} = 30 \cdot 10^{....}$

b) $0{,}02 \cdot 10^{13} = 0{,}2 \cdot 10^{....} = ... \cdot 10^{11}$

c) $5{,}1 \cdot 10^{20} = ... \cdot 10^{21} = 51 \cdot 10^{....}$

ç) $4 \cdot 10^{9} = 0{,}4 \cdot 10^{....} = 40 \cdot 10^{....}$

d) $0{,}12 \cdot 10^{18} = 12 \cdot 10^{....} = ... \cdot 10^{17}$

e) $30 \cdot 10^{15} = ... \cdot 10^{14} = 0{,}3 \cdot 10^{....}$

1.2.5. Çok Büyük Sayılar ile Çok Küçük Sayıların Bilimsel Gösterimi ve Karşılaştırılması

Hidrojen atomunun yarıçapı 0,000000046 mm, gümüş atomunun yarıçapı ise 0,0000001444 mm'dir.

http://kisi.deu.edu.tr

Günlük hayatımızda 1 milyardan (1 000 000 000) büyük sayıları para miktarlarını, nüfus sayılarını vb. ifade etmek için kullanırız. Oysaki astronomide kullanılan birçok sayı 1 milyarın üzerindedir.

Uranüs gezegeninin kütlesi 86 820 000 000 000 000 000 000 000 kg'dır.

http://rasathane.deu.edu.tr

Hidrojen atomunun yarıçapını $4{,}6 \cdot 10^{-8}$ mm, gümüş atomunun yarıçapını $1{,}444 \cdot 10^{-7}$ mm, Uranüs gezegeninin kütlesini ise $8{,}682 \cdot 10^{25}$ kg şeklinde yazabiliriz.

Bilgi Kutusu

*|a| , 1 veya 1'den büyük, 10'dan küçük bir gerçek sayı ve n bir tam sayı olmak üzere $a \cdot 10^n$ gösterimi **bilimsel gösterim**dir.*

*Okunması güç olan çok büyük ve çok küçük sayıları, daha kısa bir şekilde ifade etmek için **bilimsel gösterimden** yararlanılır.*

1. Örnek

Aşağıdaki çok küçük pozitif tam sayıları bilimsel gösterimle ifade edelim.

a) 0,0005 **b)** 0,00156 **c)** $25 \cdot 10^{-9}$ **ç)** $42,65 \cdot 10^{-6}$

Çözüm

Sayıları, tam kısımları 1 ile 10 arasında olacak şekilde yazalım.

a) $0,0005 = 5 \cdot 10^{-4}$ **b)** $0,00156 = 1,56 \cdot 10^{-3}$

c) $25 \cdot 10^{-9} = 2,5 \cdot 10^{-8}$ **ç)** $42,65 \cdot 10^{-6} = 4,265 \cdot 10^{-5}$

Sıra Sizde

Aşağıdaki çok küçük pozitif tam sayıları bilimsel gösterimle ifade ediniz.

a) 0,000072 **b)** 0,00013 **c)** $78 \cdot 10^{-5}$ **ç)** $72,9 \cdot 10^{-4}$

2. Örnek

Aşağıda bilimsel gösterimle ifade edilen sayı çiftlerini karşılaştıralım.

a) $2 \cdot 10^8 ; 2 \cdot 10^6$ **b)** $1,1 \cdot 10^{10} ; 2,5 \cdot 10^{10}$

c) $7 \cdot 10^{-9} ; 1,3 \cdot 10^2$ **ç)** $4 \cdot 10^{-12} ; 5 \cdot 10^{-14}$

Çözüm

Bilimsel gösterimle verilen sayıları karşılaştırırken;

1. kural: 10'un kuvvetine bakarız. Kuvveti büyük olan sayı daha büyüktür.

2. kural: 10'un kuvvetleri eşit ise katsayılarına bakarız. Katsayısı büyük olan daha büyüktür.

a) 10'un kuvvetlerine bakalım: 8 > 6 olduğundan $2 \cdot 10^8 > 2 \cdot 10^6$dır.

b) 10'un kuvvetleri eşittir. Bu durumda katsayılara bakalım: 2,5 > 1,1 olduğundan $2,5 \cdot 10^{10} > 1,1 \cdot 10^{10}$dur.

c) 10'un kuvvetlerine bakalım: –9 < 2 olduğundan $7 \cdot 10^{-9} < 1,3 \cdot 10^2$dir.

ç) 10'un kuvvetlerine bakalım: –12 > –14 olduğundan $4 \cdot 10^{-12} > 5 \cdot 10^{-14}$tür.

3. Örnek

Aşağıdaki çok büyük pozitif tam sayıları bilimsel gösterimle ifade edelim ve sıralayalım.

a) 48 000 000 **b)** 238 100 000 **c)** $51 \cdot 10^7$ **ç)** $922 \cdot 10^9$

Çözüm

Sayıları, tam kısımları 1 ile 10 arasında olacak şekilde yazalım.

a) $48\ 000\ 000 = 4{,}8 \cdot 10^7$ **b)** $238\ 100\ 000 = 2{,}381 \cdot 10^8$

c) $51 \cdot 10^7 = 5{,}1 \cdot 10^8$ **ç)** $922 \cdot 10^9 = 9{,}22 \cdot 10^{11}$

Bilimsel gösterimle ifade ettiğimiz sayıları 10'un tam sayı kuvvetlerini dikkate alarak sıralayalım.

$4{,}8 \cdot 10^7 < 2{,}381 \cdot 10^8 < 5{,}1 \cdot 10^8 < 9{,}22 \cdot 10^{11}$

Sıra Sizde

Aşağıdaki çok büyük pozitif tam sayıları bilimsel gösterimle ifade ederek sıralayınız.

a) 900 000 000 **b)** 59 000 000 **c)** $128 \cdot 10^8$ **ç)** $5247 \cdot 10^{12}$

4. Örnek

Dünya'nın çevre uzunluğu yaklaşık 40 000, Güneş ile Dünya arasındaki uzaklık yaklaşık 150 000 000 km'dir. Bu sayıları bilimsel gösterimle ifade edelim ve karşılaştıralım.

http://rasathane.ankara.edu.tr

Çözüm

Dünya'nın çevre uzunluğu yaklaşık: $40\ 000 \text{ km} = 4 \cdot 10^4 \text{ km}$

Güneş ile Dünya arasındaki uzaklık yaklaşık;
$150\ 000\ 000 \text{ km} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km olarak yazılır.

$4 \cdot 10^4 \text{ km} < 1{,}5 \cdot 10^8$ km'dir.

5. Örnek

Işığın 1 saniyede aldığı yol yaklaşık 300 000 km ise 1 yılda aldığı yol ne kadardır? Bilimsel gösterimle ifade edelim.

http://rasathane.ankara.edu.tr

Çözüm

Işığın 1 yılda aldığı yolu, aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 300\,000 = 9\,460\,800\,000\,000$ kilometredir.

Bu uzaklığa **ışık yılı** denir. Bu sayıyı bilimsel gösterimle $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km olarak yazabiliriz.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda 10'un pozitif tam sayı kuvvetlerinden yararlanarak verilen sayıları bilimsel gösterimle ifade ediniz. Bu sayıların bilimsel gösterimlerini karşılaştırınız.

a) $253 \cdot 10^{10} =$ ....

b) $15 \cdot 10^{8} =$ ....

c) $20 \cdot 10^{23} =$ ....

ç) $15{,}4 \cdot 10^{14} =$ ....

d) $205 \cdot 10^{8} =$ ....

2. Aşağıda 10'un negatif tam sayı kuvvetlerinden yararlanarak verilen sayıları bilimsel gösterimle ifade ediniz. Bu sayıların bilimsel gösterimlerini sıralayınız.

a) $5 \cdot 10^{-15} =$ ....

b) $12{,}3 \cdot 10^{-9} =$ ....

c) $36 \cdot 10^{-18} =$ ....

ç) $186 \cdot 10^{-24} =$ ....

d) $205 \cdot 10^{-12} =$ ....

3. Işığın bir saniyede aldığı yol, yaklaşık 300 000 km ise 1 ayda aldığı yol ne kadardır? Bilimsel olarak ifade ediniz.

4. "İ" harfinin noktasını koymak için gerekli olan mürekkebin kütlesi yaklaşık 0,000000001 kg'dır. Bunu bilimsel gösterimle ifade ediniz.

http://rasathane.ankara.edu.tr

1. Ünite Değerlendirme

1. Aşağıdaki üslü ifadelerden hangisi $\frac{1}{64}$ kesrine eşit <u>değildir</u>?

A) 8^{-2} B) 4^{-3} C) $(-2)^{-4}$ D) 2^{-6}

2. I. $3^{-4} = \frac{1}{81}$ III. $(-4)^{-3} = -64$

II. $5^{-2} = \frac{1}{25}$ IV. $2^{-6} = (-2)^{6}$

Yukarıdaki ifadelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

3. Aşağıdaki işlemlerden hangisinin sonucu 6'dır?

A) $\frac{5^5 \cdot 4^3}{2^5 \cdot 3}$ B) $\frac{3^5 \cdot 2^4}{8 \cdot 3^4}$

C) $\frac{8^3 \cdot 3^8}{9^4 \cdot 16^2}$ D) $\frac{81:16}{2^4 \cdot 3^4}$

4. Bir sepetteki portakallar beşer ve altışar sayıldığında her seferinde 2 portakal artıyor. Bu sepette en az kaç tane portakal vardır?

A) 30 B) 32 C) 34 D) 36

5. EBOB(24, 36) + EKOK(12, 18) toplamı kaçtır?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48

6. 16 ve 36 litrelik iki damacana, süt ile doludur. Damacanalardaki sütler birbirine karıştırılmayacak ve hiç artmayacak şekilde en büyük hacimli şişelere doldurulmak isteniyor. Kaç adet şişe gerekir?

A) 15 B) 14 C) 13 D)12

7. İki koşucu dairesel bir pisteki turlarını saat yönünde koşarak sırasıyla 30 ve 45 saniyede tamamlamaktadır. Aynı anda aynı yerden ve aynı yönde koşmaya başlayan koşucular 2. kez kaç saniye sonra karşılaşırlar?

A) 90 B) 120 C) 150 D) 180

8.

A	54	2
24	B	2
C	27	D
6	E	2
3	27	F
1	G	3
	3	3
	1	

olduğuna göre A + E + G toplamı kaçtır?

A) 102 B) 94 C) 84 D) 70

9. Aralarında asal iki sayının EKOK'u 450, toplamları 43 olduğuna göre bu iki sayının farkının mutlak değeri kaçtır?

A) 5 B) 7 C) 9 D) 11

10. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

a) Sıfırdan farklı her gerçek sayının sıfırıncı kuvveti ....'dir.

b) Bir üslü ifade, paydadan paya veya paydan paydaya alındığında .... işareti değişir.

c) Tabanları aynı olan üslü ifadeler çarpılırken .... toplanır, ... aynen yazılır.

ç) $|a|$, 1 veya 1'den büyük, 10'dan küçük bir gerçek sayı ve n bir tam sayı olmak üzere $a \cdot 10^n$ gösterimine .... denir.

11. Aşağıdaki gösterimlerden hangisi doğrudur?

A) $0{,}000402 = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$

B) $1\,005\,000 = 1{,}005 \cdot 10^{6}$

C) $1{,}000009 = 9 \cdot 10^{-6}$

D) $206\,000\,000 = 2{,}06 \cdot 10^{10}$

12. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başındaki kutucuğa "D", yanlış olanların başındaki kutucuğa "Y" yazınız.

☐ $3^{-4} = \dfrac{1}{81}$

☐ $(3 \cdot 7)^{10} = 3^{10} \cdot 7^{10}$

☐ $(7^8)^5 = 7^{13}$

☐ $\dfrac{2^{18}}{2^{13}} = 2^3$

☐ $5^{-4} = -5^{-8}$

☐ $5^{20} = 5^{10} \cdot 5^2$

☐ $(-3)^4 = 3^4$

☐ $\dfrac{1}{10^5} = -10^5$

13. 0,00000064 sayısının bilimsel gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6{,}4 \cdot 10^{-7}$ B) $6{,}4 \cdot 10^{-6}$

C) $6,\,4 \cdot 10^{-8}$ D) $0{,}64 \cdot 10^{-9}$

14. Aşağıdakilerden hangisi 420'nin asal çarpanlarından biri <u>değildir</u>?

A) 11 B) 5 C) 3 D) 2

15. Aşağıdakilerden hangisi 24 ile aralarında asaldır?

A) 18 B) 27 C) 35 D) 40

16. Aşağıdaki sayıları üslü ifade şeklinde yazınız.

a) 36 = ... b) −27 = ...

c) 32 = ... ç) 25 = ...

17. $5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$

Yukarıda çözümlenmiş olarak verilen sayının ondalık gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5,724 B) 50,724

C) 50,704 D) 5,7024

18. 357 400 000 000 sayısı aşağıdaki verilenlerden hangisi ile gösterilemez?

A) $357{,}4 \cdot 10^{10}$ B) $35{,}74 \cdot 10^{10}$

C) $3574 \cdot 10^8$ D) $3{,}574 \cdot 10^{11}$

19. EBOB'u 8, EKOK'u 168 olan iki sayıdan biri 24 ise diğeri kaçtır?

A) 56 B) 27 C) 18 D) 12

20. 18 ve 26 sayıları ile bölündüğünde her defasında 3 kalanını veren en küçük pozitif sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 234 B) 237 C) 239 D) 242

21. $\dfrac{(-3)^3 + 7^0 + (-2)^4}{(-1)^7}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) −42 B) −10 C) 42 D) 10

22. 5 ile bölündüğünde 2, 12 ile bölündüğünde 9 kalanını veren en küçük pozitif sayı kaçtır?

A) 63 B) 60 C) 57 D) 50

23. $\dfrac{7^{-5} \cdot 7^{12}}{7^6}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 49 B) 7 C) 1 D) 0

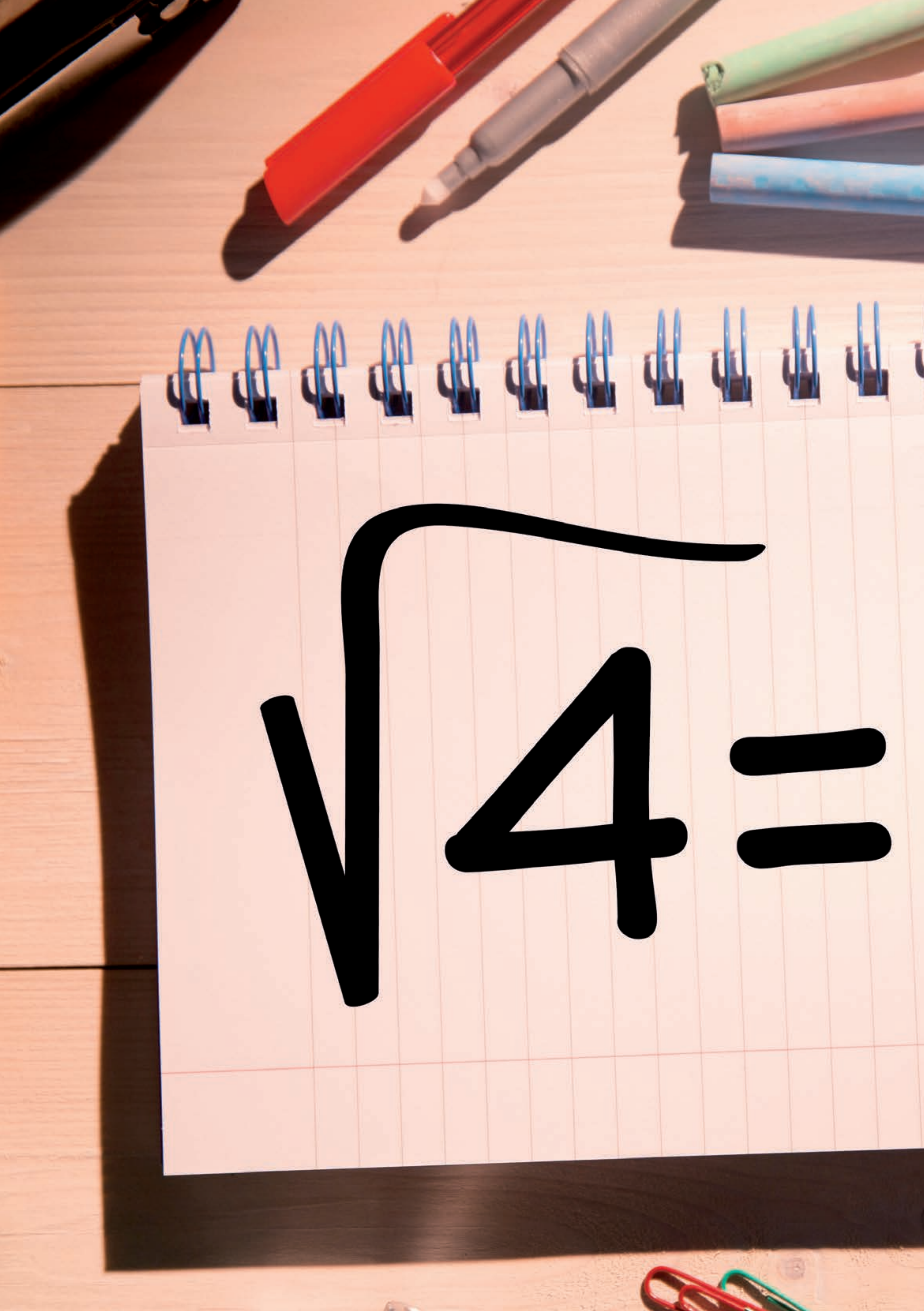
24. $\dfrac{8^4 \cdot 4^2}{2^{16}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 4

25. Aşağıdaki sayı çiftlerinden hangileri aralarında asaldır?

A) 24 ve 26 B) 33 ve 96

C) 18 ve 45 D) 25 ve 42


√4=

2. ÜNİTE

KAREKÖKLÜ İFADELER VE VERİ İŞLEME

Matematikteki en önemli işlemlerden birisi de karekök hesaplamadır. Tam kare sayıların kareköklerini hesaplamak oldukça kolay iken 8,17 vb. tam kare olmayan sayıların kareköklerini hesaplamak oldukça zordur. Karekök hesaplamada teknolojiden yararlanmak belki de en kolay yoldur. Bir hesap makinesine sayısının değerini hesaplattığımızda hızlı bir şekilde $\sqrt{2} = 1,414214$ yanıtını vereceğini görürsünüz. Hesap makinelerinin burada yaptıkları şey oldukça hızlı bir algoritma kullanmaktır. Ne zaman hesap makinesinin karekök tuşuna dokunsak makine sayısal bir tekrarlama işlemini devreye sokmakta ve sonucu bulmaktadır. Karekök hesaplama işleminde basit sayısal algoritmalar bulma işinin ilk olarak Babilliler tarafından bulunduğu bilinmektedir.

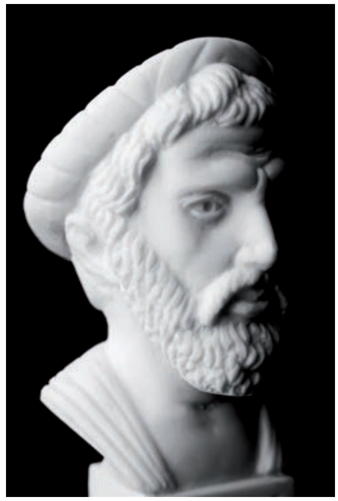
www.nef.balikesir.edu.tr

2. ÜNİTE

2.1. Bölüm Kareköklü İfadeler

Aksi ispatlanıncaya kadar bütün sayıların rasyonel olduğu yani m ve n (n sıfırdan farklı) birer tam sayı olmak üzere $\frac{m}{n}$ şeklinde yazılabildiği zannedilmiştir. Bu fikri güçlü bir şekilde savunan Pisagor, tüm sayıların rasyonel olduğunu mantık yoluyla ispatlamaya çalışmışsa da başarılı olamamıştır. İkiz kenarlarının uzunluğu birer birim olan ikizkenar dik üçgenin diğer kenar uzunluğu $\sqrt{2}$ birimdir (Dik üçgenlerin kenar uzunluklarını bulmayı ileriki bölümlerde öğreneceğiz). Hikâyeye göre Pisagor'un takipçilerinden Hippasus, bu sayıyı $\frac{m}{n}$ şeklinde ifade etmeye çalışırken asla iki m ve n tam sayısı bulunamayacağını yani sayının rasyonel olmadığını ispatlamıştır.

http://biyolojiegitim.yyu.edu.tr



Pythagoras (Pisagor, MÖ 569-475 ya da MÖ 580-500)

Terimler veya Kavramlar

- *Tam kare pozitif sayılar*
- *Karekök*
- *Gerçek sayı*
- *İrrasyonel sayı*

Sembol

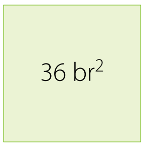
- $\sqrt{}$
- $\mathbb{R}$

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Tam kare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi belirleme*
- *Tam kare olmayan kareköklü bir sayının değerlerinin hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirleme*
- *Kareköklü bir ifadeyi $a\sqrt{b}$ şeklinde yazma ve $a\sqrt{b}$ şeklindeki ifadede katsayıyı kök içine alma*
- *Kareköklü ifadelerde çarpma ve bölme işlemleri yapma*
- *Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemi yapma*
- *Kareköklü bir ifade ile çarpıldığında sonucu bir doğal sayı yapan çarpanlara örnek verme*
- *Ondalık ifadelerin kareköklerini belirleme*
- *Gerçek sayıları tanıma, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirme*

2.1.1. Tam Kare Pozitif Tam Sayılarla Karekökleri Arasındaki İlişki

Aşağıdaki şekillerde kare biçimindeki düzlemlerin alanları verilmiştir. Bu şekillerin bir kenar uzunluğunu bulalım.



1. şekil

2. şekil

Karenin alanı bir kenar uzunluğu "a" olmak üzere a^2 ile bulunur.

1. şekilde karenin alanı 36 br^2dir. Karenin bir kenar uzunluğunu bulmak için "hangi sayının karesi 36'dır?" şeklide düşünmek gerekir. O hâlde

$a^2 = 36\ br^2$ ise $a = 6$ br olmalıdır.

2. şekilde karenin alanı 64 br^2dir. O hâlde

$a^2 = 64\ br^2$ ise $a = 8$ br olmalıdır.

36 ve 64 tam sayıları sırasıyla 6 ve 8 tam sayılarının karesidir. O hâlde 36 ve 64 sayıları tam kare sayılarıdır.

Bilgi Kutusu

Karekök sembolü, "$\sqrt{\ }$ "tür. Karesi a olan sayı, $\sqrt{a}$ dır. $x^2 = a$ ifadesinde x'in değeri, $\sqrt{a}$ dır.

1. Örnek

4 ve 49 tam sayıları tam kare sayılar mıdır? Bulalım.

Çözüm

4 ve 49 tam sayılarını çarpanlarına ayıralım.

$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ $\qquad 49 = 7 \cdot 7 = 7^2$

4, 2'nin; 49, 7'nin karesidir. O hâlde 4 ve 49 tam kare sayılardır.

Tam kare sayıların, hangi sayının karesi olduğunu bulma işlemine kare kök alma işlemi denir.

$\sqrt{4} = 2$ ifadesi 4'ün karekökü 2'dir;

$\sqrt{49} = 7$ ifadesi 49'ın karekökü 7'dir şeklinde yazılır ve okunur.

Bilgi Kutusu

*Bir tam sayının karesi olan sayılara **tam kare pozitif tam sayılar** denir.*

Sıra Sizde

$\sqrt{16}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{81}$ ve $\sqrt{169}$ kareköklü ifadelerinin değerlerini bulunuz.

Bilgi Kutusu

Negatif sayıların karekökü alınamaz. Çünkü bir sayının karesi negatif olamaz.

2. Örnek

Aşağıdaki sayıların kareköklerini hesaplayalım.

a) 144 b) 225

Çözüm

Doğal sayıların, hangi sayıların kareleri olduğunu bulalım.

a)

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$144 = 2^4 \cdot 3^2 = 4^2 \cdot 3^2 = 12^2$

$\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

b)

$$\begin{array}{r|l} 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$225 = 3^2 \cdot 5^2 = 15^2$

$\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$

Problem

İçinde bulunan bitki çeşitliliğini korumak ve geliştirmek için koruma altına alınan bir bahçenin alanı 100 m^{2}dir. Kare şeklindeki bu bahçenin kenarları tel ile çevrilecektir. Kaç metre tele ihtiyaç vardır? Bulalım.

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

Problemde verilen ve isteneni belirleyelim.

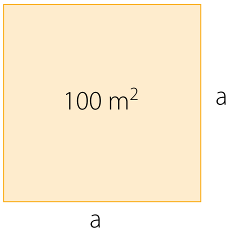
Verilen	İstenen
Bahçenin alanı: 100 m^2	Kullanılacak telin uzunluğu: ?

2. Çözümü Planlayalım

Problemi özet olarak yazalım.

Bahçenin alanı	Bahçenin kenar uzunluğu	Bahçenin çevre uzunluğu
100 m^2	?	?

Problemin şemasını çizelim.



Bahçenin bir kenarı a ise alanı a • a formülü ile bulunur. Bahçenin bir kenar uzunluğunu bulmak için alanının karekökünü bulmalıyız. Bahçenin çevre uzunluğunu bulmak için ise çarpma işlemi yaparız.

3. Planı Uygulayalım

$a \cdot a = 100$

$a = \sqrt{100}$

$a = 10$ m bulunur.

Karenin çevresi $= 4 \cdot a = 4 \cdot 10$

$= 40$ m olur.

Bahçenin çevresini tel ile çevirmek için 40 m tele ihtiyaç vardır.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

Kullanılacak tel miktarından yararlanarak bahçenin bir kenarının uzunluğunu, sonra da alanını bulalım.

Çevre $= 40$ m

Bir kenar uzunluğu $= 40 : 4 = 10$ m

Alan $= 10 \cdot 10 = 100\ m^2$ bulunur. Bulunan sonuç doğrudur.

3. Örnek

$\sqrt{36} + \sqrt{25} - \sqrt{484}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

Önce karekökleri hesaplayalım sonra işlemlerin sonuçlarını bulalım.

$\sqrt{6^2} + \sqrt{5^2} - \sqrt{22^2} = 6 + 5 - 22 = 11 - 22 = -11$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdakilerden hangisi tam kare sayı <u>değildir</u>?

A) 144 B) 2000 C) 256 D) 4900

2. 1'den 20'ye kadar olan sayıların karelerini bularak defterinize yazınız.

3. Aşağıdaki sayıların kareköklerini bulunuz.

196 169 121 81 225 256 2500 900

4. Alanı 225 m^2 olan kare şeklindeki bir oyun alanının çevresi iki sıra ip ile çevrilecektir. Kaç metre ip gereklidir?

5. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\dfrac{\sqrt{36}+\sqrt{144}}{\sqrt{49}-\sqrt{16}}$ b) $\sqrt{196}+\sqrt{64}+\sqrt{100}$ c) $\dfrac{\sqrt{9}+\sqrt{36}-\sqrt{4}}{\sqrt{49}}$

2.1.2. Tam Kare Olmayan Kareköklü Sayıların Değerlerinin Hangi İki Doğal Sayı Arasında Olduğunu Bulma

$\sqrt{7}$ 'nin hangi iki doğal sayı arasında olduğunu bulalım. Bunun için önce 7 sayısının hangi iki tam kare sayısının arasında olduğunu belirleyelim.

$4 < 7 < 9 \rightarrow$ 7, 4 ve 9 tam kare sayıları arasındadır.

Bu sayıların kareköklerini alalım.

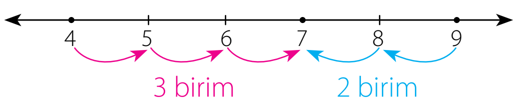
$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$

$\sqrt{2^2} < \sqrt{7} < \sqrt{3^2}$

$2 < \sqrt{7} < 3$

Görüldüğü gibi $\sqrt{7}$, 2 ile 3 arasındadır. Şimdi 7'nin 2'ye mi yoksa 3'e mi daha yakın olduğunu bulalım.

Bunun için sayı doğrusundan yararlanalım.



Sayı doğrusunda da görüldüğü gibi 7; 4'e 3 birim, 9'a 2 birim uzaklıkta olduğundan 9'a daha yakındır.

Bu durumda $\sqrt{7}$, 3'e daha yakındır.

1. Örnek

$\sqrt{40}$ **sayısının değerinin hangi iki doğal sayı arasında olduğunu bulalım.**

Çözüm

40 sayısından küçük ve ona en yakın tam kare sayı ile 40 sayısından büyük ve ona en yakın tam kare sayıyı yazalım.

$\sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$ 36 ve 49'un kareköklerini bulalım.

$\sqrt{6^2} < \sqrt{40} < \sqrt{7^2}$

$6 < \sqrt{40} < 7$

O hâlde $\sqrt{40}$, 6 ile 7 arasındadır.

Sayı doğrusunda da görüldüğü gibi 40, 36'ya 49'dan daha yakın olduğundan $\sqrt{40}$, 6'ya daha yakındır.

2. Örnek

$\sqrt{108}$ **sayısının değerinin hangi iki doğal sayı arasında olduğunu bulalım.**

Çözüm

108 sayısından küçük ve ona en yakın tam kare sayı ile 108 sayısından büyük ve ona en yakın tam kare sayıyı yazalım.

$\sqrt{100} < \sqrt{108} < \sqrt{121}$ 100 ve 121'in kareköklerini bulalım.

$\sqrt{10^2} < \sqrt{108} < \sqrt{11^2}$

$10 < \sqrt{108} < 11$

O hâlde $\sqrt{108}$ sayısının değeri, 10 ile 11 arasındadır. 108, 100'e 121'den daha yakın olduğundan $\sqrt{108}$, 10'a daha yakındır.

Sıra Sizde

Aşağıda karekökleri alınan doğal sayıların hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirleyerek boş bırakılan yerlere yazınız.

a) .... < $\sqrt{105}$ < .... b) .... < $\sqrt{108}$ < .... c) .... < $\sqrt{50}$ < .... ç) .... < $\sqrt{48}$ < ....

d) .... < $\sqrt{120}$ < .... e) .... < $\sqrt{85}$ < .... f) .... < $\sqrt{319}$ < .... g) .... < $\sqrt{218}$ < ....

3. Örnek

Alanı 78 m^2 olan kare biçimindeki bir oyun parkı belediyenin "Kent Estetiği Daire Başkanlığı" tarafından onarılarak çevresine şerit çekilecektir. Bu iş için yaklaşık kaç metre şerit gerektiğini bulalım.

Çözüm

Oyun parkının alanı 78 m^2 olduğuna göre 78'in karekökünü alıp oyun parkının bir kenar uzunluğunu bulalım. Ancak 78, tam kare bir sayı olmadığından $\sqrt{78}$ 'nin değerini tam olarak bulamayız. Bunun için kullanılacak şerit miktarını yaklaşık olarak hesaplayalım. Önce 78'in hangi iki tam kare doğal sayı arasında olduğunu belirleyelim, sonra $\sqrt{78}$ 'nin değerini tahmin edelim.

$64 < 78 < 81$

$\sqrt{64} < \sqrt{78} < \sqrt{81}$

$8 < \sqrt{78} < 9$

O hâlde $\sqrt{78}$, 8 ile 9 arasındadır. 78, 81'e daha yakın olduğundan $\sqrt{78}$, 9'a daha yakındır. Bu durumda oyun parkının bir kenar uzuluğunu, yaklaşık 9 m alalım.

Kenar uzunluğu 9 m olan kare biçimindeki oyun parkının çevre uzunluğu: $4 \cdot 9 = 36$ m bulunur. Oyun parkının çevresi için yaklaşık olarak 36 m şerit yeterli olacaktır.

Etkinlik

Araç ve Gereç: hesap makinesi

- Aşağıdaki kareköklü ifadelerin değerlerini hesap makinesi ile bulunuz. (Hesap makinesinde önce karekökünü hesaplayacağınız sayıyı yazınız, sonra " $\sqrt{\ }$ " tuşuna basınız.)
- Sonuçları, aşağıda boş bırakılan yerlere yazınız.

$\sqrt{60} \cong ....$ $\sqrt{150} \cong ....$ $\sqrt{300} \cong ....$ $\sqrt{72} \cong ....$

- Yazdığınız sayıların hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirleyerek aşağıda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

$.... < \sqrt{60} < ....$ $.... < \sqrt{150} < ....$

$.... < \sqrt{300} < ....$ $.... < \sqrt{72} < ....$

- Doğal sayıların karesini alarak bunları karekökü alınan sayı ile karşılaştırınız ve aralarındaki ilişkiyi açıklayınız.

✓ Tam kare olmayan sayıların karekök değerlerinin hangi iki doğal sayı arasında olduğu nasıl belirlenir? Arkadaşlarınızla tartışınız.

2.1.3. Kareköklü Bir İfadeyi $a\sqrt{b}$ Biçiminde Yazma ve $a\sqrt{b}$ Biçimindeki İfadede Katsayıyı Karekök İçine Alma

12 sayısını asal çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 12 = 2^2 \cdot 3$$

12'nin karekökünü alalım.

$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ bulunur.

12'nin çarpanı olan 4, tam kare bir doğal sayıdır. O hâlde 4, karekök dışına 2 olarak çıkar. 3, tam kare bir doğal sayı olmadığından kök dışına çıkamaz. 2, $\sqrt{3}$ 'ün katsayısı olarak yazılır.

Bilgi Kutusu

Kareköklü bir ifadeyi $a\sqrt{b}$ biçiminde yazmak için karekök içindeki sayılar, asal çarpanlarına ayrılır. Tam kare olan çarpanlar karekök dışına çıkarılır, tam kare olmayan çarpanlar karekök içinde kalır.

$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$

Etkinlik

- 192 doğal sayısını asal çarpanlarına ayırınız.
- Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.
  - ✓ 192 tam kare sayı mıdır?
  - ✓ 192'nin hangi çarpanları tam kare sayılardır?
  - ✓ 192'nin tam kare çarpanlarının karekökü kaçtır?
  - ✓ 192'nin karekökü nasıl alınır?

$$\begin{array}{r|l} 192 & \\ & \end{array} \qquad 192 = \text{..................}$$

- Sorulara verdiğiniz yanıtlardan yararlanarak aşağıda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

  $\sqrt{192} = \sqrt{\text{.......} \cdot 3} = \text{.......}\sqrt{3}$

- Yaptıklarınızdan yararlanarak aşağıda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

  $\sqrt{360} = \sqrt{\text{.......} \cdot 10} = \text{.......}\sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt{128} = \sqrt{\text{.......} \cdot 2} = \text{.......}\sqrt{2}$

  ✓ Tam kare olmayan doğal sayıların karekökleri nasıl alınır? Arkadaşlarınızla tartışınız. Ulaştığınız sonuçları açıklayınız.

- Aşağıdaki kareköklü ifadelerin katsayılarının karekök içine nasıl girebileceğini düşününüz. Ulaştığınız sonuçlardan yararlanarak aşağıda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

$2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$ $\qquad$ $4\sqrt{6} = \sqrt{4^2 \cdot \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots \cdot 6} = \sqrt{\ldots\ldots}$

✓ Kareköklü ifadelerin katsayıları karekök içine nasıl alınır? Arkadaşlarınızla tartışınız. Ulaştığınız sonuçları açıklayınız.

1. Örnek

Aşağıda verilen kareköklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

a) $\sqrt{54}$ $\qquad$ b) $\sqrt{45}$

Çözüm

Karekök içindeki sayıları asal çarpanlarına ayıralım.

a)

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$54 = 3^3 \cdot 2$

$54 = 3^2 \cdot 6$

$\sqrt{54} = \sqrt{3^2 \cdot 6}$

$= 3\sqrt{6}$

b)

45	3
15	3
5	5
1	

$45 = 3^2 \cdot 5$

$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5}$

$= 3\sqrt{5}$

2. Örnek

Aşağıda verilen kareköklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

a) $\sqrt{75}$ $\qquad$ b) $\sqrt{24}$ $\qquad$ c) $\sqrt{18}$

Çözüm

a) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

c) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

Sıra Sizde

Aşağıda verilen kareköklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazınız.

a) $\sqrt{108}$ $\qquad$ b) $\sqrt{24}$ $\qquad$ c) $\sqrt{124}$ $\qquad$ ç) $\sqrt{250}$

3. Örnek

Aşağıda yer alan ifadelerdeki katsayıları karekök içine alalım.

a) $4\sqrt{3}$ b) $3\sqrt{6}$ c) $2\sqrt{10}$

Çözüm

İfadelerdeki katsayılar, kareleri alınarak karekök içine alınır.

a) $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$

b) $3\sqrt{6} = \sqrt{3^2 \cdot 6} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{54}$

c) $2\sqrt{10} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{40}$

Bilgi Kutusu

Karekök dışındaki katsayıyı karekök içine almak için katsayının karesi alınır. Sonuç karekök içindeki sayı ile çarpılır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadelerde katsayıları karekök içine alınız.

a) $2\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{7}$ c) $4\sqrt{10}$ ç) $5\sqrt{5}$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. $\sqrt{106}$ hangi iki doğal sayı arasındadır?

A) 10-11 B) 9-10 C) 11-12 D) 8-10

2. Aşağıdaki eşitliklerden doğru olanların başındaki kutucuğa "D", yanlış olanların başındaki kutucuğa "Y" yazınız.

☐ $11\sqrt{2} = \sqrt{242}$ ☐ $\sqrt{867} = 17\sqrt{3}$

☐ $\sqrt{242} = 2\sqrt{10}$ ☐ $\sqrt{338} = 13\sqrt{3}$

☐ $10\sqrt{6} = \sqrt{60}$ ☐ $2\sqrt{13} = \sqrt{62}$

☐ $98 = 2\sqrt{7}$ ☐ $12\sqrt{5} = \sqrt{720}$

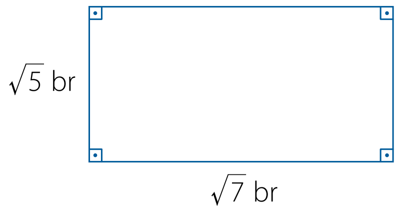
3. Alanı 243 cm^2 olan karenin bir kenar uzunluğunu $a\sqrt{b}$ şeklinde yazınız.

4. $\sqrt{147} = a\sqrt{3}$ ve $\sqrt{75} = b\sqrt{3}$ ise $a + b$ kaçtır?

2.1.4. Kareköklü İfadelerle Çarpma ve Bölme İşlemleri

Kareköklü İfadelerde Çarpma İşlemi

Kenar uzunlukları verilen aşağıdaki düzlemsel şeklin alanını bulalım.



Bilgi Kutusu

Kareköklü İfadelerle İşlemlerde 1. Kural

Kareköklü ifadelerde çarpma işlemi yapılırken karekök içindeki sayılar çarpılır ve çarpım karekök içine yazılır. Varsa katsayılar çarpılıp katsayı olarak yazılır. Karekök içindeki çarpım tam kare bir sayı ise bu sayının karekökü alınarak sonuç bulunur.

$k\sqrt{a} \cdot m\sqrt{b} = k \cdot m\sqrt{a \cdot b}$

Alanı bulmak için kenar uzunluklarını çarpmalıyız.

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35}$ br^2

Kareköklü sayılarla çarpma işlemi yapılırken karekök içindeki sayılar çarpılarak çarpım karekök içine yazılır. O hâlde aşağıdaki çarpma işlemlerini yapalım.

- $\sqrt{15} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{15 \cdot 2} = \sqrt{30}$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4$
- $3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3} = 3 \cdot 2\sqrt{5 \cdot 3} = 6\sqrt{15}$
- $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{27} = 4 \cdot 2\sqrt{3 \cdot 27} = 8\sqrt{81} = 8\sqrt{9^2} = 8 \cdot 9 = 72$ bulunur.

1. Örnek

Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapalım.

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$

Çözüm

Kareköklü ifadelerle işlemlerde 1. kuraldan yararlanarak çarpma işlemlerini yapalım.

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{6 \cdot 5} = \sqrt{30}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21}$

2. Örnek

Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapalım.

a) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12}$ b) $8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{50}$

Çözüm

Kareköklü ifadelerle işlemlerde 1. kuraldan yararlanarak çarpma işlemlerini yapalım.

a) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{12} = 5 \cdot 2\sqrt{3 \cdot 12} = 10\sqrt{36} = 10 \cdot 6 = 60$ olur.

b) $8\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{50} = 8 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 50} = 16\sqrt{100} = 16 \cdot 10 = 160$ olur.

3. Örnek

$2\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$ işleminin sonucunu bulalım.

Çözüm

$$2\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} = 2\sqrt{6 \cdot 12} = 2\sqrt{72}$$
$$= 2\sqrt{6^2 \cdot 2}$$
$$= 2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

Aşağıdaki çarpma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

a) $2\sqrt{27} \cdot 4\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ c) $\sqrt{18} \cdot 3\sqrt{8}$ ç) $4\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6}$

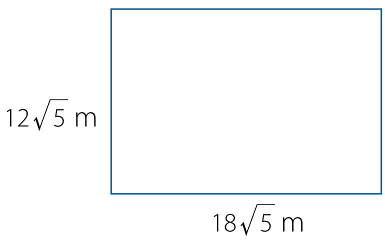
d) $3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}$ e) $5\sqrt{12} \cdot 3\sqrt{3}$ f) $6\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{8}$ g) $2\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{20}$

4. Örnek

Kenar uzunlukları $12\sqrt{5}$ m ve $18\sqrt{5}$ m olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçeye ekim yapılacaktır. Kaç m^2lik alana ekim yapılacağını bulalım.

Çözüm

Soruya ait şema çizelim.



Kenar uzunlukları $12\sqrt{5}$ m ve $18\sqrt{5}$ m olan bahçenin alanını bulmak için kenar uzunluklarını çarpmalıyız. Bunun için de kareköklü sayıların çarpımından yararlanmalıyız.

Bahçenin alanı: $12\sqrt{5} \cdot 18\sqrt{5} = 216\sqrt{25}$
$$= 216 \cdot 5$$
$$= 1080 \text{ m}^2 \text{ bulunur.}$$

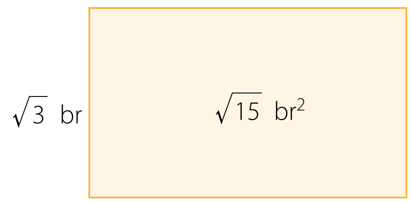
Sıra Sizde

a) Kenar uzunluğu $6\sqrt{5}$ m olan karenin alanı kaç m^2dir?

b) Kenar uzunlukları 8 m ve $3\sqrt{6}$ m olan dikdörtgen biçimindeki halının alanı kaç m^2dir?

Kareköklü İfadelerle Bölme İşlemi

Yanda bir kenar uzunluğu ve alanı verilen dikdörtgenin diğer kenar uzunluğunu bulalım.



"$\sqrt{3}$ ile hangi kareköklü ifadeyi çarparsak sonuç $\sqrt{15}$ olur?" sorusunun yanıtı bize diğer kenar uzunluğunu verir.

Dikdörtgenin kenar uzunluğunu bulmak için şeklin alanını, verilen kenar uzunluğuna bölmeliyiz.

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{3}^{1}}} = \sqrt{5}$$

O hâlde dikdörtgenin diğer kenarının uzunluğu $\sqrt{5}$ birimdir.

Kareköklü ifadelerle bölme işlemi yapılırken karekökü alınan sayılar, aynı karekök içine yazılır. O hâlde aşağıdaki bölme işlemlerini yapalım.

- $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{24}^{4}}{\cancel{6}^{1}}} = \sqrt{4} = 2$
- $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{75}^{15}}{\cancel{5}^{1}}} = \sqrt{15}$

Bilgi Kutusu

Kareköklü İfadelerle İşlemlerde 2. Kural

Kareköklü ifadelerde bölme işlemi yapılırken kareköklü sayıların katsayıları varsa bu sayılar sadeleştirilerek katsayı olarak yazılır. Karekökün içindeki sayılar aynı karekök içine bölüm biçiminde yazılır. Karekök içindeki bölme işlemi sonucunda bulunan sayı tam kare ise karekök dışına çıkarılarak bölme işleminin sonucu bulunur.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

1. Örnek

Aşağıdaki bölme işlemlerinin sonuçlarını bulalım.

a) $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{6\sqrt{200}}{2\sqrt{40}}$

Çözüm

Kareköklü ifadelerle işlemlerde 2. kuraldan yararlanarak bölme işlemlerinin sonuçlarını bulalım.

a) $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{\cancel{162}^{54}}{\cancel{3}^{1}}} = \sqrt{54}$
$= \sqrt{9 \cdot 6}$
$= 3\sqrt{6}$

b) $\dfrac{6\sqrt{200}}{2\sqrt{40}} = \dfrac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}^{1}}\sqrt{\dfrac{\cancel{200}^{5}}{\cancel{40}^{1}}} = 3\sqrt{5}$

Sıra Sizde

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{15}}$ b) $\dfrac{10\sqrt{72}}{2\sqrt{18}}$

2. Örnek

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $\dfrac{\sqrt{98}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75}\cdot\sqrt{15}}{5\sqrt{5}}$

Çözüm

Çarpma ve bölme işlemlerini birlikte yapalım.

a) $\dfrac{\sqrt{98}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{98\cdot\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}^{1}}} = \sqrt{294} = 7\sqrt{6}$

b) $\dfrac{\sqrt{75}\cdot\sqrt{15}}{5\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}\sqrt{\dfrac{\cancel{75}^{15}\cdot 15}{\cancel{5}^{1}}} = \dfrac{1}{5}\sqrt{15\cdot 15} = \dfrac{1}{5}\cdot 15 = 3$

Sıra Sizde

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\dfrac{\sqrt{24}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt{6}}$ b) $\dfrac{\sqrt{80}\cdot 3\sqrt{12}}{\sqrt{45}}$ c) $\dfrac{3\sqrt{21}\cdot 4\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

3. Örnek

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $\dfrac{\sqrt{48}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\dfrac{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}\cdot\sqrt{20}}{\sqrt{80}}$

Çözüm

Çarpma ve bölme işlemlerini yapalım.

a) $\dfrac{\sqrt{48}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{3\sqrt{48\cdot 6\cdot 2}}{\sqrt{18}}$

$= 3\sqrt{\dfrac{\cancel{576}^{32}}{\cancel{18}^{1}}}$

$= 3\sqrt{32} = 3\sqrt{16\cdot 2} = 3\cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

b) $\dfrac{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}\cdot\sqrt{20}}{\sqrt{80}} = \dfrac{5\sqrt{5\cdot125\cdot20}}{\sqrt{80}}$

$= 5\sqrt{\dfrac{5\cdot125\cdot\cancel{20}^{1}}{\cancel{80}^{4}}}$

$= 5\cdot\sqrt{\dfrac{625}{4}} = 5\cdot\dfrac{\sqrt{625}}{\sqrt{4}} = \dfrac{5\cdot25}{2} = \dfrac{125}{2}$

Sıra Sizde

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\dfrac{6\sqrt{8}\cdot9\sqrt{64}\cdot\sqrt{512}}{\sqrt{128}}$

b) $\dfrac{\sqrt{42}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{252}}{\sqrt{7}}$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki çarpma ve bölme işlemlerini yapınız.

a) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{3}$

b) $\sqrt{57}\cdot\sqrt{42}$

c) $3\sqrt{27}\cdot2\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$

ç) $\dfrac{\sqrt{250}}{\sqrt{10}}$

d) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{8}$

e) $5\sqrt{108}\cdot6\sqrt{2}$

f) $\dfrac{\sqrt{84}}{\sqrt{12}}$

g) $\dfrac{12\sqrt{42}}{\sqrt{6}}$

2. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\dfrac{6\sqrt{6}\cdot4\sqrt{12}}{3\sqrt{8}}$

b) $\dfrac{3\sqrt{128}\cdot\sqrt{8}}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{27}\cdot\sqrt{48}\cdot\sqrt{60}}{\sqrt{5}\cdot4\sqrt{3}}$

ç) $\dfrac{\sqrt{32}\cdot4\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

4. Kenar uzunlukları $5\sqrt{2}$ ve $3\sqrt{6}$ cm olan dikdörtgenin alanını bulunuz.

5. Kenar uzunluğu $6\sqrt{10}$ cm olan karenin alanını bulunuz.

2.1.5. Kareköklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Aşağıdaki noktalı bölgede iki nokta arası $\sqrt{2}$ birimdir. Buna göre noktalı bölge üzerinde verilen doğru parçalarının

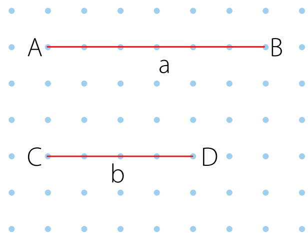
a) Uzunlukları toplamını,

b) Uzunluklarının farkını $\sqrt{2}$ birim cinsinden bulalım.

Noktalı bölgede iki nokta arası $\sqrt{2}$ birimdir. Bu durumda doğru parçalarının uzunluklarını, noktaların arasını sayarak bulalım.

Buna göre $|AB| = 6\sqrt{2}$ br,

$|CD| = 4\sqrt{2}$ br'dir.



Bilgi Kutusu

Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işleminin yapılabilmesi için karekök içindeki sayıların aynı olması gerekir. Karekök içindeki sayılar aynı ise katsayıları toplanıp çıkarılabilir. Kök içindeki sayı aynen yazılır.

$b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b+c)\sqrt{a}$

$b\sqrt{a} - c\sqrt{a} = (b-c)\sqrt{a}$

a) Doğru parçalarının uzunluklarının toplamını önce sayarak bulalım. $6\sqrt{2}$ br'in üzerine $4\sqrt{2}$ br saydığımızda toplamı $10\sqrt{2}$ br olur.

Şimdi de işlem yapalım.

$|AB| + |CD| = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (6+4)\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ br bulunur.

b) Doğru parçalarının uzunluklarının farkını önce sayarak bulalım. $6\sqrt{2}$ br, $4\sqrt{2}$ br'den $2\sqrt{2}$ br uzundur.

Şimdi de işlem yapalım.

$6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (6-4)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ br bulunur.

Aşağıdaki toplama ve çıkarma işlemlerini inceleyiniz.

a) $8\sqrt{7} + 12\sqrt{7} = (8+12)\sqrt{7} = 20\sqrt{7}$

b) $5\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = (5+9)\sqrt{6} = 14\sqrt{6}$

c) $4\sqrt{3} + \sqrt{3} = (4+1)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

ç) $4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (4-2)\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = (3-8)\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$

1. Örnek

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$ b) $\sqrt{10} + 4\sqrt{10}$ c) $5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

Çözüm

Kareköklü ifadelerin katsayılarını toplayıp çıkaralım:

a) $2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$ b) $\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$ c) $5\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

Karekök içleri aynı olmadığı durumlarda toplama ve çıkarma işlemi yapmak için aşağıdaki yol izlenebilir.

Kareköklü sayılar $a\sqrt{b}$ biçiminde yazılarak karekök içindeki sayılar aynı yapılabilir. Bu şekilde toplama ya da çıkarma işlemine devam edilir.

$$\begin{aligned}\sqrt{50}+\sqrt{72} &= \sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{36\cdot 2}\\ &= 5\sqrt{2}+6\sqrt{2}\\ &= (5+6)\sqrt{2}\\ &= 11\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2\\ 25 & 5\\ 5 & 2\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{aligned} 50 &= 5^2\cdot 2\\ &= 25\cdot 2\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2\\ 36 & 2\\ 18 & 2\\ 9 & 3\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{aligned} 72 &= 2^3\cdot 3^2\\ &= 36\cdot 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{48}-\sqrt{12} &= \sqrt{16\cdot 3}-\sqrt{4\cdot 3}\\ &= 4\sqrt{3}-2\sqrt{3}\\ &= (4-2)\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2\\ 24 & 2\\ 12 & 2\\ 6 & 2\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{aligned} 48 &= 2^4\cdot 3\\ &= 16\cdot 3\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2\\ 6 & 2\\ 3 & 3\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{aligned} 12 &= 2^2\cdot 3\\ &= 4\cdot 3\end{aligned}$$

2. Örnek

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $\sqrt{24}+\sqrt{54}$ b) $\sqrt{48}+2\sqrt{3}-2\sqrt{27}$ c) $\sqrt{200}-3\sqrt{8}+3\sqrt{5}$

Çözüm

İşlemlerin sonuçlarını bulmak için kareköklü ifadelerin içinin aynı olması gerekir. Bunun için verilen kareköklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

a) $\sqrt{24}+\sqrt{54}=\sqrt{4\cdot 6}+\sqrt{9\cdot 6}=2\sqrt{6}+3\sqrt{6}=5\sqrt{6}$

b) $$\begin{aligned}\sqrt{48}+2\sqrt{3}-2\sqrt{27}=\sqrt{16\cdot 3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{9\cdot 3} &= 4\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\cdot 3\sqrt{3}\\ &= 6\sqrt{3}-6\sqrt{3}\\ &= 0\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\sqrt{200}-3\sqrt{8}+3\sqrt{5}=\sqrt{100\cdot 2}-3\sqrt{4\cdot 2}+3\sqrt{5} &= 10\sqrt{2}-3\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{5}\\ &= 10\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{5}\\ &= 4\sqrt{2}+3\sqrt{5}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $3\sqrt{27}+\sqrt{48}$ b) $\sqrt{96}+\sqrt{150}-\sqrt{54}$ c) $\sqrt{18}-\sqrt{32}-\sqrt{50}+\sqrt{200}$

3. Örnek

$\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{128}}{6}$ **işleminin sonucunu bulalım.**

Çözüm

Verilen kareköklü ifadeleri $a\sqrt{b}$ şeklinde yazalım.

$$\frac{\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{128}}{6}=\frac{\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{16\cdot 2}+\sqrt{64\cdot 2}}{6}=\frac{2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{6}$$
$$=\frac{(2-4+8)\sqrt{2}}{6}=\frac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$$

4. Örnek

$\sqrt{8a}+\sqrt{18a}+\sqrt{32a}=36$ **ise a pozitif gerçek sayısını bulalım.**

Çözüm

Kareköklü ifadeleri önce $a\sqrt{b}$ biçiminde yazalım.

$$\sqrt{8a}+\sqrt{18a}+\sqrt{32a}=36$$
$$\sqrt{4\cdot 2a}+\sqrt{9\cdot 2a}+\sqrt{16\cdot 2a}=36$$
$$2\sqrt{2a}+3\sqrt{2a}+4\sqrt{2a}=36$$
$$(2+3+4)\sqrt{2a}=36$$
$$\frac{9\sqrt{2a}}{9}=\frac{36}{9}$$

$\sqrt{2a}=4$ ise $2a=16$'dır.

$a=8$ olur.

5. Örnek

$\sqrt{4+\sqrt{27-\sqrt{1+\sqrt{9}}}}$ **işleminin sonucunu bulalım.**

Çözüm

$$\sqrt{4+\sqrt{27-\sqrt{1+\sqrt{9}}}}=\sqrt{4+\sqrt{27-\sqrt{1+3}}}=\sqrt{4+\sqrt{27-\sqrt{4}}}=\sqrt{4+\sqrt{27-2}}$$
$$=\sqrt{4+\sqrt{25}}$$
$$=\sqrt{4+5}$$
$$=\sqrt{9}=3$$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $3\sqrt{28}+4\sqrt{7}$

b) $6\sqrt{7}+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

c) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{12}+\sqrt{27}$

ç) $\sqrt{24}+\sqrt{24}+\sqrt{24}$

d) $\sqrt{28-\sqrt{15-\sqrt{32+\sqrt{16}}}}$

e) $\sqrt{7}\cdot(\sqrt{28}-\sqrt{175}+\sqrt{63})$

f) $2\sqrt{50}-3\sqrt{8}-3\sqrt{128}$

g) $\sqrt{112}-\sqrt{175}$

ğ) $\sqrt{500}-2\sqrt{180}+2\sqrt{80}$

2. $\sqrt{12a}+\sqrt{48a}+\sqrt{75a}=66$ ise a pozitif gerçek sayısı kaçtır?

3. Alanı 48 cm^2 olan bir karenin çevre uzunluğunu bulunuz.

4. $\dfrac{\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}{\sqrt{18}}$ işleminin sonucu kaçtır?

5. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\dfrac{\sqrt{54}+\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$

b) $\dfrac{5\sqrt{3}\cdot5\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

2.1.6. Kareköklü İfadelerle Çarpıldığında Sonucu Doğal Sayı Yapan Çarpanlar

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

1. $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4\cdot3}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{9}=2\cdot3=6$

2. $\sqrt{12}\cdot2\sqrt{3}=\sqrt{4\cdot3}\cdot2\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{9}=4\cdot3=12$

3. $\sqrt{12}\cdot\sqrt{48}=\sqrt{4\cdot3}\cdot\sqrt{16\cdot3}=2\sqrt{3}\cdot4\sqrt{3}=8\cdot\sqrt{9}=8\cdot3=24$

$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot3}=2\sqrt{3}$ olduğundan $\sqrt{12}$'nin karekök dışına çıkamayan çarpanı $\sqrt{3}$'tür.

1. işlemde $\sqrt{12}$, $\sqrt{3}$ ile çarpılmış ve sonuç doğal sayı çıkmıştır.

2. işlemde $\sqrt{12}$, $\sqrt{3}$'ün 2 katı ile çarpılmış ve sonuç doğal sayı çıkmıştır.

3. işlemde $\sqrt{12}$, $\sqrt{3}$'ün tam kare çarpanı olan $\sqrt{48}$ $(\sqrt{48}=\sqrt{4^2\cdot3})$ ile çarpılmış ve sonuç doğal sayı çıkmıştır.

1. Örnek

$2\sqrt{6}$ sayısı ile çarpılınca sonucu doğal sayı yapan çarpanlara örnekler verelim.

$2\sqrt{6}$ sayısında karekök içindeki sayı 6'dır. O hâlde $2\sqrt{6}$ sayısını $\sqrt{6}, 3\sqrt{6}$ ve $\sqrt{600}$ sayıları ile çarparsak sonuç doğal sayı olur.

$2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$

$2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6} = 6\sqrt{36} = 6 \cdot 6 = 36$

$2\sqrt{6} \cdot \sqrt{600} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{100 \cdot 6} = 2\sqrt{6} \cdot 10\sqrt{6} = 20\sqrt{36} = 20 \cdot 6 = 120$

Sıra Sizde

$3\sqrt{5}$ sayısı ile çarpıldığında sonucu doğal sayı olan çarpanlara başka örnekler bulunuz.

2. Örnek

$\sqrt{54}$ sayısı aşağıdaki sayılardan hangileri ile çarpılırsa sonucun doğal sayı olacağını belirleyelim.

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{6}$
- $\sqrt{18}$
- $\sqrt{24}$
- $\sqrt{54}$
- $5\sqrt{6}$
- $9\sqrt{3}$

Çözüm

$\sqrt{54} = \sqrt{3^2 \cdot 6} = 3\sqrt{6}$ olduğundan $\sqrt{54}$ sayısını $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$'nın tam sayı katları ya da $\sqrt{6}$'nın tam kare katları ile çarpılırsa sonuç bir doğal sayı olur.

$\sqrt{54} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{9 \cdot 6} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{36} = 3 \cdot 6 = 18$

$\sqrt{54} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{9 \cdot 6} \cdot \sqrt{4 \cdot 6} = 3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{36} = 6 \cdot 6 = 36$

$\sqrt{54} \cdot \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} \cdot \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6} = 9\sqrt{36} = 9 \cdot 6 = 54$

$\sqrt{54} \cdot 5\sqrt{6} = \sqrt{9 \cdot 6} \cdot 5\sqrt{6} = 3\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{6} = 15\sqrt{36} = 15 \cdot 6 = 90$

Bu durumda $\sqrt{54}$'ün $\sqrt{6}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{54}$ ve $5\sqrt{6}$ ile çarpımları bir doğal sayıya eşittir.

$\sqrt{54}$'ü $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{18}$ ve $9\sqrt{3}$ ile çarptığımızda sonuç bir doğal sayı olmaz.

Sıra Sizde

$\sqrt{48}$ sayısı aşağıdaki sayılardan hangileri ile çarpılırsa sonucun doğal sayı olacağını belirleyiniz.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{8}$ ç) $5\sqrt{3}$ d) $\sqrt{12}$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. $\sqrt{20}$ sayısı aşağıdaki sayılardan hangileri ile çarpılırsa sonucun doğal sayı olacağını belirleyerek "✓" ile işaretleyiniz.

☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\sqrt{5}$ ☐ $\sqrt{10}$ ☐ $\sqrt{45}$

☐ $\sqrt{80}$ ☐ $\sqrt{20}$ ☐ $\sqrt{12}$

2. Aşağıdaki kareköklü ifadelerle çarpılınca sonucu doğal sayı yapan iki çarpan bulunuz.

a) $3\sqrt{21}$ b) $2\sqrt{11}$ c) $4\sqrt{12}$ ç) $\sqrt{24}$

2.1.7. Ondalık İfadelerin Karekökleri

Bilgi Kutusu

Ondalık ifadelerin karekökleri alınırken önce karekök içindeki sayı kesir sayısı olarak yazılır, sonra kareköklü sayılarla bölme işlemi yapılır.

$\sqrt{0,25}$ sayısının değerini hesaplayalım. Bunun için ondalık gösterimi verilen sayılar ile ilgili önceki bilgilerimizden yararlanalım. Karekök içindeki sayıyı hesaplama yapabileceğimiz şekle dönüştürelim.

$$\sqrt{0,25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ bulunur.}$$

Görüldüğü gibi ondalık gösterimi verilen sayıyı önce kesir sayısı olarak yazdık, sonra iki kesrin bölümü biçimine dönüştürdük ve karekökleri hesaplayarak sonuca ulaştık.

1. Örnek

Aşağıdaki kareköklü ifadelerin değerlerini bulalım.

a) $\sqrt{1,44}$ b) $\sqrt{0,0256}$ c) $\sqrt{0,01}$ ç) $\sqrt{0,0121}$

Çözüm

a) $\sqrt{1,44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = 1,2$

b) $\sqrt{0,0256} = \sqrt{\frac{256}{10\,000}} = \frac{\sqrt{256}}{\sqrt{10\,000}} = \frac{16}{100} = 0,16$

c) $\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10} = 0,1$

ç) $\sqrt{0,0121} = \sqrt{\frac{121}{10\,000}} = \frac{11}{100} = 0,11$

Sıra Sizde

Aşağıdaki kareköklü ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\sqrt{1,69}$ b) $\sqrt{0,0225}$ c) $\sqrt{0,04}$

2. Örnek

Aşağıda verilen toplama işlemlerini yapalım.

a) $\sqrt{0,16}+\sqrt{0,09}$ b) $\sqrt{2,25}-\sqrt{0,01}$ c) $\dfrac{\sqrt{1,44}+2\sqrt{0,09}}{\sqrt{0,01}}$

Çözüm

Ondalık ifadeleri rasyonel şekilde yazarak kareköklerini alalım.

a) $\sqrt{0,16}+\sqrt{0,09}=\sqrt{\dfrac{16}{100}}+\sqrt{\dfrac{9}{100}}=\dfrac{4}{10}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{7}{10}=0,7$

b) $\sqrt{2,25}-\sqrt{0,01}=\sqrt{\dfrac{225}{100}}-\sqrt{\dfrac{1}{100}}=\dfrac{15}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{14}{10}=1,4$

c) $\dfrac{\sqrt{1,44}+2\sqrt{0,09}}{\sqrt{0,01}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{144}{100}}+2\sqrt{\dfrac{9}{100}}}{\sqrt{\dfrac{1}{100}}}=\dfrac{\dfrac{12}{10}+2\cdot\dfrac{3}{10}}{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{\dfrac{12}{10}+\dfrac{6}{10}}{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{\dfrac{18}{10}}{\dfrac{1}{10}}=\dfrac{18}{10}\cdot\dfrac{10}{1}=18$

Sıra Sizde

Aşağıda verilen işlemleri yapınız.

a) $\sqrt{0,25}+\sqrt{0,0064}$ b) $\sqrt{2,56}+2\sqrt{0,81}$ c) $\dfrac{\sqrt{0,36}-2\sqrt{0,04}}{\sqrt{0,01}}$

3. Örnek

$\dfrac{\sqrt{0,09}}{\sqrt{\dfrac{1}{1,44}}}$ işlemini yapalım.

Çözüm

Ondalık kesirleri rasyonel biçimde yazıp kareköklerini alalım.

$$\dfrac{\sqrt{0,09}}{\sqrt{\dfrac{1}{1,44}}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{9}{100}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{144}{100}}}}=\dfrac{\dfrac{3}{10}}{\sqrt{\dfrac{100}{144}}}=\dfrac{\dfrac{3}{10}}{\dfrac{10}{12}}=\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{12}{10}=\dfrac{36}{100}=0,36$$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

1. $\dfrac{\sqrt{0,09}+\sqrt{1,44}}{\sqrt{0,64}}$

2. $\dfrac{\sqrt{0,16}+\sqrt{0,04}}{\sqrt{0,36}}$

3. $\sqrt{0,04}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{0,64}}$

4. $\sqrt{1,5}\cdot\sqrt{24}+\sqrt{0,5}\cdot\sqrt{32}$

5. $\dfrac{9\sqrt{0,01}-3\sqrt{0,04}}{\sqrt{1,69}}$

6. $\dfrac{\sqrt{0,0256}+\sqrt{0,0169}}{\sqrt{1,96}}$

7. $\dfrac{\sqrt{0,81}+\sqrt{0,0625}-\sqrt{1,21}}{\sqrt{\dfrac{1}{2,25}}}$

2.1.8. Gerçek Sayılar

Derslerimizde doğal sayıları ve tam sayıları, kesirleri; bu sayıların özelliklerini; bu sayılarla işlem yapmayı öğrenmiştik. Günlük yaşantımızda kullandığımız sayılar da bu sayılardır. Aynı zamanda kesirleri ondalık gösterimle, ondalık gösterimle verilen sayıları kesir olarak ifade edebiliriz.

$\dfrac{9}{10}$ ve $\dfrac{21}{200}$ kesirlerini ondalık gösterimle ifade edelim.

$\dfrac{9}{10}=0,9$ $\qquad\qquad$ $\underset{(5)}{\dfrac{21}{200}}=\dfrac{105}{1000}=0,105$

Şimdi de $\dfrac{10}{3}$ kesrinin ondalık gösterimini yazalım.

10'u 3'e bölelim.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} -9 & 3,3333333\,... \\ \cline{1-1} 10 & \\ -9 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Böyle sayılara **devirli ondalık gösterimli** sayı dendiğini biliyoruz. Bu sayıyı, devirli ondalık gösterimle $3,\overline{3}$ biçiminde yazabiliriz.

Hatırlayalım

$1,2\overline{5}$ devirli ondalık gösteriminin hangi rasyonel sayıyı gösterdiğini hatırlayalım.

$1,2\overline{5}$ sayısının rasyonel sayı olduğunu gösterelim.

$1,2\overline{5} = \dfrac{125-12}{90} = \dfrac{113}{90}$ bulunur.

1. Örnek

$0,\overline{3}$; 2,4 ve 3,10241706... sayılarından hangilerinin bir rasyonel sayı olarak yazılamayacağını bulalım.

Çözüm

Sayıların bir rasyonel sayı olarak yazılması demek $b \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{a}{b}$ şeklinde yazılması demektir.

$0,\overline{3} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$'tür. O hâlde devirli ondalık gösterimi ile $0,\overline{3}$ olarak gösterilen sayı rasyonel sayı olarak yazılabilmektedir.

$2,4 = \dfrac{24}{10} = \dfrac{12}{5}$'tir. O hâlde ondalik gösterimi ile 2,4 olarak gösterilen sayı rasyonel sayı olarak yazılabilmektedir.

3,10241706... sayısı $\dfrac{a}{b}$ şeklinde yazılamamaktadır.

2. Örnek

π ve $\sqrt{2}$ sayılarını iki tam sayının oranı biçiminde yazmaya çalışalım.

Çözüm

$\pi = 3,14159...$ sayısının ondalık kısmında devreden sayı yoktur. Bu nedenle π sayısı iki tam sayının oranı biçiminde yazılamaz.

$\sqrt{2} = 1,414213...$ sayısının ondalık kısmında devreden sayı yoktur. Bu nedenle $\sqrt{2}$ sayısı iki tam sayının oranı biçiminde yazılamaz.

O hâlde π ve $\sqrt{2}$ sayıları rasyonel sayı değildir.

Bilgi Kutusu

π sayısı irrasyonel sayı olmasına rağmen işlemlerde kolaylık sağlaması açısından 3; 3,14 veya $\dfrac{22}{7}$ olarak alınabilir.

Bilgi Kutusu

*Paydası "0" olmayan ve iki tam sayının oranı biçiminde yazılabilen sayılara **rasyonel sayılar** denir.*

*İki tam sayının oranı biçiminde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir.*

Rasyonel ve irrasyonel sayıların hepsi gerçek sayıları oluşturur. Gerçek sayılar $\mathbb{R}$ harfi ile gösterilir.

3. Örnek

Aşağıda ondalık gösterimi verilen sayılardan rasyonel ve irrasyonel olanları belirleyelim.

a) 0,2 **b)** $1,\overline{5}$

c) $\sqrt{3}$ **ç)** 3,1415926535...

Çözüm

Sayıları $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ biçiminde yazmaya çalışalım.

a) $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

b) $1,\overline{5} = \frac{15-1}{9} = \frac{14}{9}$

} 0,2 ve $1,\overline{5}$ sayıları rasyonel sayılardır.

c) $\sqrt{3} = 1,73205080...$

ç) $\pi = 3,1415926535...$

} sayıları $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamadığından irrasyonel sayılardır.

Her rasyonel ve irrasyonel sayı bir gerçek sayıdır. Tıpkı her doğal sayının bir tam sayı ya da her tam sayının aynı zamanda bir rasyonel sayı olması gibi.

Bu durumda 0,3; $\frac{10}{3}$; $1,2\overline{5}$; π; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$; $-\frac{8}{5}$; $\sqrt{5}$; 13; $-\sqrt{2}$; $-\frac{1}{4}$; ... rasyonel ve irrasyonel sayıları birer gerçek sayıdır.

Gerçek sayılar, sayı doğrusunu tam olarak doldurur. Sayı doğrusu üzerinde her bir noktaya bir gerçek sayı karşılık gelir.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda ondalık gösterimleri verilen sayıları rasyonel sayı olarak yazınız.

a) 1,25 **b)** 0,9 **c)** 1,356 **ç)** 14,8

2. Aşağıda devirli ondalık gösterimleri verilen sayıları rasyonel sayı olarak yazınız.

a) $0,\overline{85}$ **b)** $1,5\overline{684}$ **c)** $15,54\overline{6}$ **ç)** $5,18\overline{74}$

3. Aşağıdaki sayılardan rasyonel ve irrasyonel olanları belirleyiniz.

a) 3,4 **b)** $\sqrt{64}$ **c)** $\sqrt{15}$ **ç)** 0,18

2.2. Bölüm
Veri Analizi

İstatistik, verileri toplama ve toplanan verileri düzenleme, analiz etme, yorumlama, objektif ve doğru kararı verme ile ilgili bilimsel teknik ve metotlar geliştiren ve uygulayan bir bilim dalıdır. Bu nedenle hangi alanda olursa olsun tüm araştırmacılar istatistik teknik ve yöntemlerini en azından tanımak ve belirli ölçüde bilmek zorundadır. Veri analizi, araştırma kapsamında toplanan verilerin özetlenmesi, değerlendirilmesi için gerekli tüm istatistiksel yöntemleri kapsar.

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *En fazla üç veri grubuna ait çizgi ve sütun grafiklerini yorumlama*
- *Verileri sütun, daire veya çizgi grafiği ile gösterme ve bu gösterimler arasında uygun olan dönüşümleri yapma*

2.2.1. Çizgi ve Sütun Grafiğini Yorumlama

Türkiye İstatistik Kurumu verilerine göre 2010-2016 yılları arasında öğretmen başına düşen öğrenci sayısı aşağıdaki sıklık tablosu ile verilmiştir.

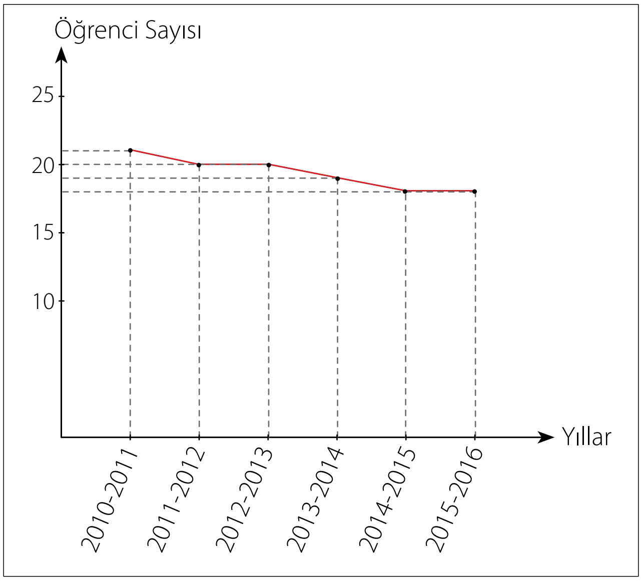
Tablo: Öğretmen Başına Düşen Öğrenci Sayısı

Yıllar	Öğretmen Başına Düşen Öğrenci Sayısı
2010-2011	21
2011-2012	20
2012-2013	20
2013-2014	19
2014-2015	18
2015-2016	18

http://www.tuik.gov.tr

Sıklık tablosuna ait çizgi grafiğini çizelim.

Grafik: Öğretmen Başına Düşen Öğrenci Sayısı



Grafiği yorumlayalım.

- Öğretmen başına düşen en fazla öğrenci sayısı 2010-2011 yılında olmuştur.
- 2011–2012 ve 2012–2013 yıllarında öğretmen başına düşen öğrenci sayısı eşittir.
- Yıllar geçtikçe öğretmen başına düşen öğrenci sayısı azalmıştır.
- Öğretmen başına düşen öğrenci sayısının en az olduğu yıllar 2014-2015 ve 2015-2016 yıllarıdır.

1. Örnek

Aşağıdaki sıklık tablosunda iki ilin 6 aylık ortalama sıcaklık değerleri verilmiştir. Bu duruma uygun grafiği çizelim. Grafikten yararlanarak iki ilin hava sıcaklıklarını karşılaştıralım.

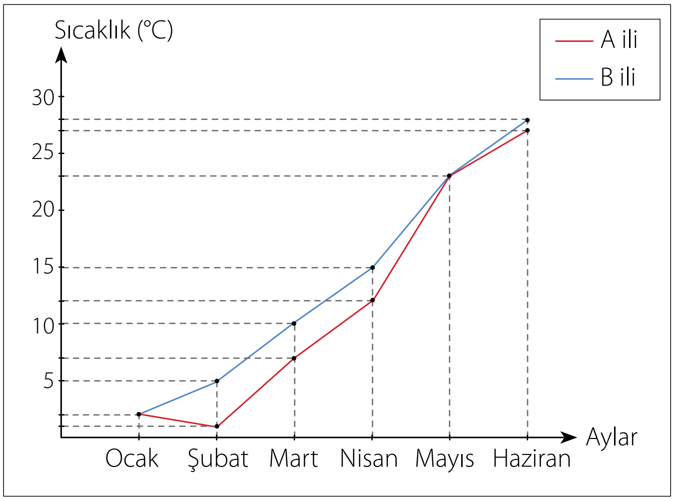
Tablo: 6 Aylık Sıcaklık Ortalamaları

Aylar	A İlinin Sıcaklık Ortalamaları (°C)	B İlinin Sıcaklık Ortalamaları (°C)
Ocak	2	2
Şubat	1	4
Mart	7	10
Nisan	12	15
Mayıs	23	23
Haziran	27	28

Çözüm

Sıklık tablosundaki verilerin zamanla nasıl değiştiğini görmek için çizgi grafiği kullanmamız daha uygun olur.

Grafik: 6 Aylık Sıcaklık Ortalamaları



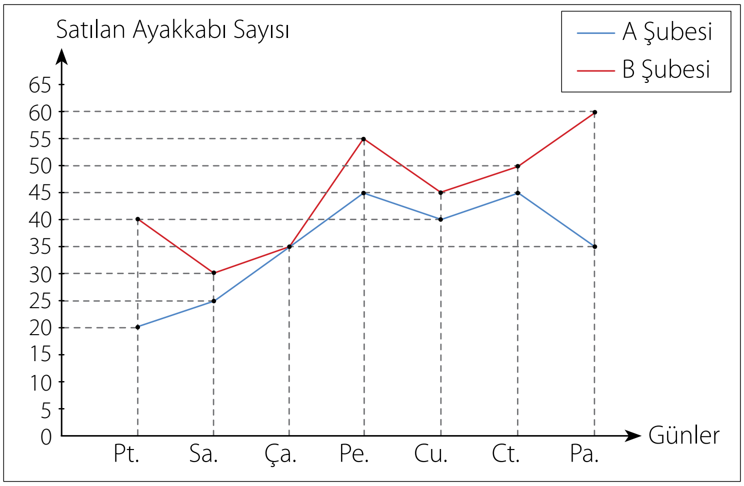
Grafikte görüldüğü gibi

- A ilinde ocak ayından sonra 1 °C düşüş olmuş sonra sıcaklık hep artmıştır.
- B ilinde en düşük sıcaklık ocak ayında ölçülmüş sonra sıcaklık hep artmıştır.
- Hava sıcaklığı genel olarak B ilinde A ilinden daha fazladır.
- İki ilde de hava sıcaklığı genel olarak benzer biçimde artmıştır.
- İki ilde de en yüksek sıcaklık haziran ayında ölçülmüştür.
- İki ilde de hava sıcaklığı en çok nisan ile mayıs ayları arasında artmıştır.

2. Örnek

Aynı ayakkabı firmasının iki farklı şubesine ait haftalık ayakkabı satışları aşağıdaki grafikte verilmiştir.

Grafik: İki Şubedeki Ayakkabı Satışı



Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayalım:

1. Çarşamba günü iki şubede toplam kaç ayakkabı satılmıştır?
2. Bir hafta boyunca A şubesinde toplam kaç ayakkabı satılmıştır?
3. B şubesinde en az ayakkabı satıldığı gün A şubesinde kaç ayakkabı satılmıştır?
4. Bu iki şubeye gelen müşteri sayısı en az hangi gün olmuştur?
5. Bir hafta boyunca hangi şube daha fazla satış yapmıştır?

Çözüm

Grafiğe göre verilen soruları yanıtlayalım.

1. Çarşamba günü A şubesinde 35, B şubesinde 35 ayakkabı satılmıştır. İki şubede toplam 70 ayakkabı satılmıştır.

2. A şubesinde pazartesi günü 20, salı günü 25, çarşamba günü 35, perşembe günü 45, cuma günü 40, cumartesi günü 45, pazar günü 35 ayakkabı satılmıştır. O hâlde A şubesinde toplam 20 + 25 + 35 + 45 + 40 + 45 + 35 = 245 ayakkabı satılmıştır.

3. B şubesinde en az ayakkabı satıldığı gün salıdır. Salı günü A şubesinde 25 adet ayakkabı satılmıştır.

4. Her iki şubede toplam ayakkabı satışları aşağıdaki gibi olmuştur.

Pazartesi günü 60, salı günü 55, çarşamba günü 70, perşembe günü 100, cuma günü 85, cumartesi günü 95, pazar günü 95'tir.

O hâlde her iki şubede en az ayakkabı satıldığı gün salıdır.

5. Grafikte de görüldüğü gibi B şubesi A şubesine göre daha fazla satış yapmıştır.

A şubesinde bir hafta boyunca 245 ayakkabı satılmıştır.

B şubesinde pazartesi günü 40, salı günü 30, çarşamba günü 35, perşembe günü 55, cuma günü 45, cumartesi günü 50, pazar günü 60 ayakkabı satılmıştır.

O hâlde B şubesinde toplam 40 + 30 + 35 + 55 + 45 + 50 + 60 = 315 ayakkabı satılmıştır.

3. Örnek

Yandaki sıklık tablosunda bir okuldaki 8. sınıfların A, B ve C şubelerine ait kız ve erkek öğrenci sayıları verilmiştir. Buna uygun grafiği çizelim ve grafikteki bilgileri yorumlayalım.

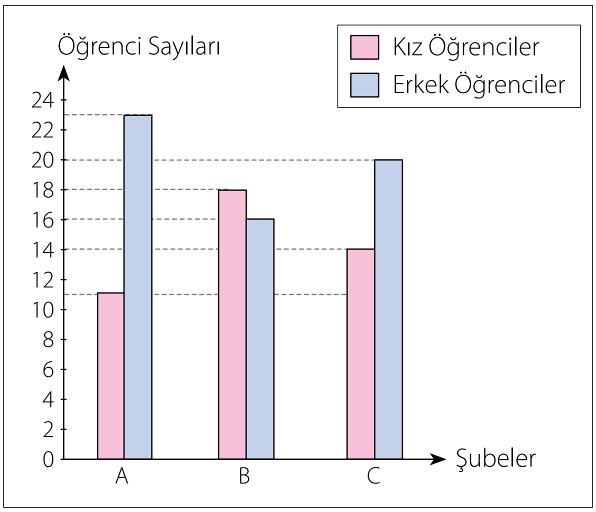
Tablo: 8. Sınıfların Kız ve Erkek Öğrenci Sayıları

Şubeler	Kız Öğrenci Sayısı	Erkek Öğrenci Sayısı
A	11	23
B	18	16
C	14	20

Çözüm

Bu şubelerdeki kız ve erkek öğrenci sayıları birbirinden bağımsızdır. Bu duruma uygun olan grafik türü sütun grafiğidir.

Grafik: 8. Sınıflar Öğrenci Mevcutları



Grafikte görüldüğü gibi; en az kız öğrenci A şubesinde, en fazla kız öğrenci B şubesinde bulunmaktadır.

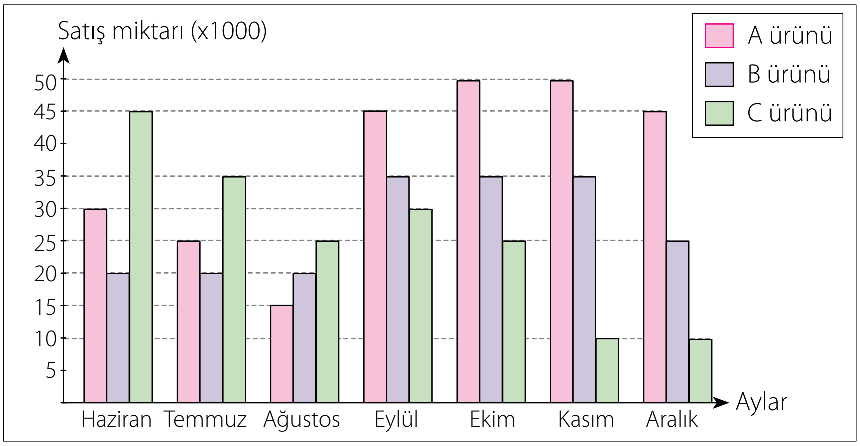
Kız ve erkek öğrenciler arasında farkın en fazla olduğu şube A, en az olduğu şube B şubesidir.

En fazla erkek öğrenci olan şube A şubesinde, en az erkek öğrenci B şubesinde bulunmaktadır.

4. Örnek

Bir fabrika ürettiği üç ürünün son altı aydaki satışını karşılaştırarak en az satılan ürünü üretimden kaldıracaktır. Bunun için ürünlerin satış sayılarını aşağıdaki grafikte gösterdiler. Fabrika yönetiminin hangi ürünü üretimden kaldırmasını gerektiğini grafiği yorumlayarak bulalım.

Grafik: Fabrikadaki Ürünlerin Satış Miktarı



Çözüm

Ürünlerin son 6 ayda ne kadar satıldığını bulalım.

	A	B	C
Haziran	30	20	45
Temmuz	25	20	35
Ağustos	15	20	25
Eylül	45	35	30
Ekim	50	35	25
Kasım	50	35	10
Aralık	+ 45	+ 25	+ 10
	265	195	190

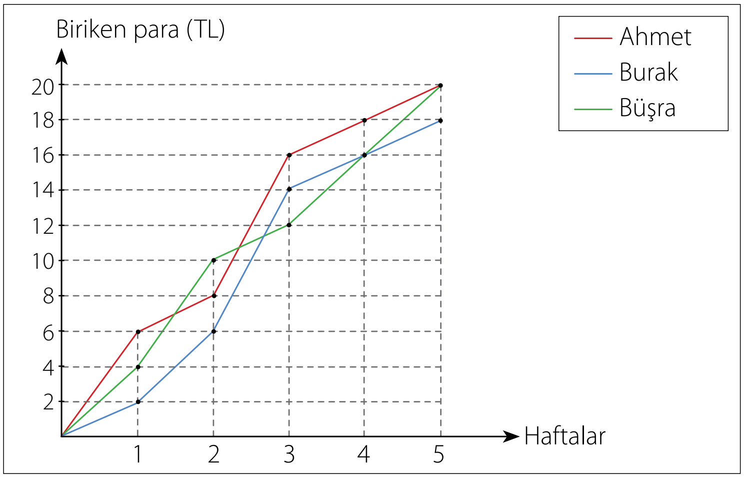
Son 6 ayda A ürünü 265 000, B ürünü 195 000, C ürünü 190 000 satılmıştır. Bu durumda en çok satılan A ürünü ile üretime devam edilmelidir. Üretimden kaldırmak için B ve C ürünleri arasında karar verilmeli.

B ürünü ile C ürünü arasındaki fark 5000 ve C ürününün satışının son aylarda azaldığı grafikte görülmektedir. Bu durumda C ürününün üretimden kaldırılması en doğru karar olacaktır.

5. Örnek

Ahmet, Büşra ve Burak üç kardeştir. Annelerine hediye almak için para biriktiriyorlar. Üçü birlikte ayrı ayrı 5 hafta para biriktirdiler. Beş haftada biriktirdikleri para ile ilgili aşağıdaki grafiği çizdiler. Grafiği inceleyerek hediye için 5. hafta sonunda ne kadar para biriktirdiklerini bulalım.

Grafik: Hediye İçin Biriktirilen Para Miktarı



Çözüm

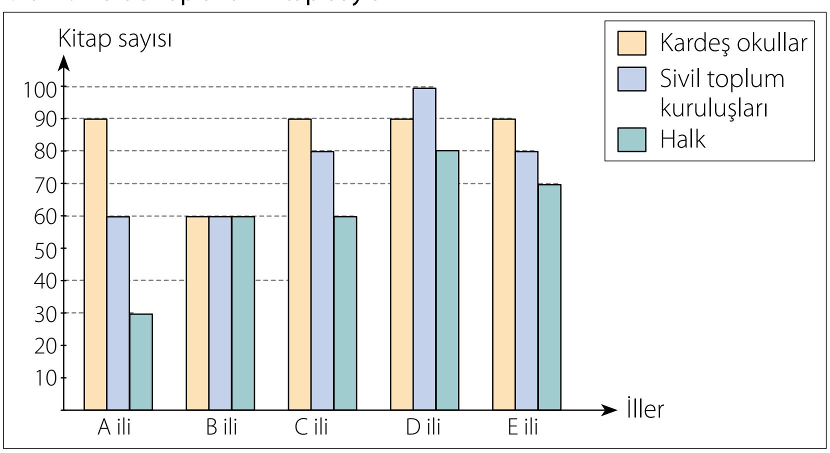
Grafikte görüldüğü gibi Ahmet 20 TL, Büşra 20 TL, Burak 18 TL biriktirmiştir.

Üçü birlikte 20 + 20 + 18 = 58 TL biriktirmiş oldular.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Yeni açılan bir okulun kütüphanesini oluşturmak için çalışmalar yapılmaktadır. Bunun için çevredeki beş ildeki kardeş okullardan, sivil toplum kuruluşlarından ve halktan yardım istenmiştir. İllerden toplanan kitapların sayıları yardım gelen kuruluşlara göre belirlenip aşağıdaki grafik çizilmiştir.

Grafik: İllerde Toplanan Kitap Sayısı



Grafiğe göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Kütüphane için ne kadar kitap toplanmıştır?

b) En çok hangi kuruluştan kitap gelmiştir?

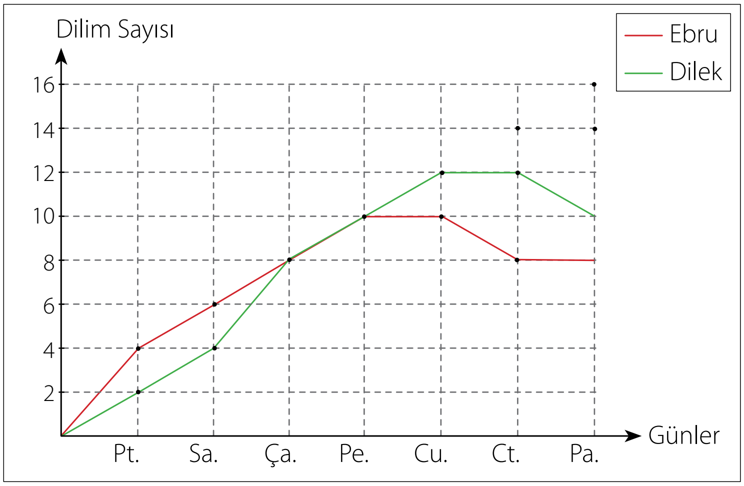
c) En az hangi ilden kitap gelmiştir?

ç) Hangi ildeki okul en çok kitap göndermiştir?

d) Hangi ilin halkı en çok kitap göndermiştir?

2. Ebru ile Dilek, çok ekmek yemenin zararlı olduğunu düşünerek birlikte önlem almak istediler. Bunun için 7 gün boyunca yedikleri ekmek dilimi miktarlarını not ettiler. Topladıkları verileri aynı grafik üzerinde gösterdiler. Aşağıdaki soruları grafikten yararlanarak yanıtlayınız.

Grafik: Yenen Ekmek Dilimi Sayısı



a) Ebru 7 günde toplam kaç dilim ekmek yemiştir?

b) Dilek 5 gün sonunda kaç dilim ekmek yemiştir?

c) Ebru en fazla hangi gün ekmek yemiştir?

ç) Dilek hangi gün ekmek yememiştir?

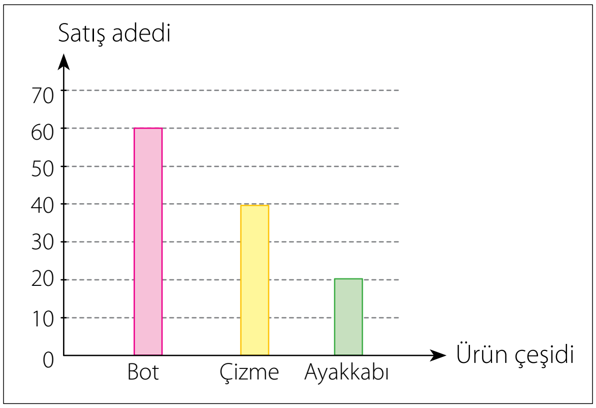
2.2.2. Verilerin Farklı Grafik Türleri ile Gösterimi

Araştırma yapılarak verilerin toplanması ve bu verilerin analiz edilmesi ile ilgili yöntem ve teknikleri inceleyen bilim dalına **istatistik** denir. İstatistik çalışmaları sonucunda elde edilen bilgiler tablo ya da grafikle gösterilebilir. İstatistikte kullanılan tablo çeşitleri, sıklık tablosu ve çetele tablosudur. Grafik çeşitleri ise çizgi grafiği, sütun grafiği, daire grafiği ve histogramdır. Tablo veya grafikle gösterilen verileri daha kolay yorumlayabiliriz.

1. Örnek

Aşağıdaki sütun grafiğinde bir mağazanın bir haftada sattığı ürünler ve bu ürünlerin miktarları gösterilmiştir.

Grafik: Haftalık Satış Durumu



Sütun grafiğini daire grafiği şeklinde gösterelim.

Çözüm

Sütun grafiğinde üç adet ürünün satış karşılaştırması görülmektedir. Bir haftada 60 adet bot, 40 adet çizme ve 20 adet ayakkabı satılmıştır. Toplam $60 + 40 + 20 = 120$ adet ürün satılmıştır. Her bir ürün miktarının daire grafiğinde hangi açıya karşılık geldiğini bulalım.

Ürün miktarının daire grafiğinde hangi açıya karşılık geldiğini bulmak için bir ürünün satış sayısını toplam ürün satış sayısına bölerek 360° ile çarparız.

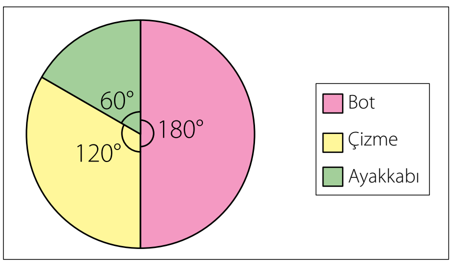
$$\text{Bot oranı} = \frac{\text{Satılan bot sayısı}}{\text{Satılan toplam ürün sayısı}} \cdot 360° = \frac{60}{120} \cdot 360° = 180°$$

$$\text{Çizme oranı} = \frac{\text{Satılan çizme sayısı}}{\text{Satılan toplam ürün sayısı}} \cdot 360° = \frac{40}{120} \cdot 360° = 120°$$

$$\text{Ayakkabı oranı} = \frac{\text{Satılan ayakkabı sayısı}}{\text{Satılan toplam ürün sayısı}} \cdot 360° = \frac{20}{120} \cdot 360° = 60°$$

Bulduğumuz açı değerlerini kullanarak daire grafiğini çizelim.

Grafik: Haftalık Satış Durumu



Daire grafiğine bakıldığında en büyük merkez açı bota ait olduğundan en çok bot satılmıştır, en küçük merkez açı ayakkabıya ait olduğundan en az ayakkabı satılmıştır sonucuna ulaşılır.

Bilgi Kutusu

*Grafikte, veriler arasında belirlediğimiz sabit uzaklıklara **ölçek** denir. Ölçek ne kadar küçük alınırsa sonuçlar o kadar net ve güvenilir olur.*

Bilgi Kutusu

Sütun grafiği genellikle farklı cinslerin karşılaştırılması için kullanılır. Sütun grafiğinde veriler birbirinden bağımsızdır.

Çok sayıda değerin karşılaştırması için idealdir. Daire grafiğe göre daha hassas karşılaştırmalar yapabilmemize imkân tanır.

Bilgi Kutusu

Daire grafiği bir bütünün parçalarını kıyaslamak için kullanılır. Daire grafiği ile diğer grafiklerle kolayca gösterilemeyen bilgiler gösterilebilir. Bu grafik türü, iki veri hakkında karşılaştırma yapmayı kolaylaştırır.

Büyük farkları karşılaştırmak için uygundur, farklıklar azaldığında görsel olarak karşılaştırma yapmak güçleşir. Daire dilimi sayısı fazla olmamalıdır.

2. Örnek

Aşağıdaki tabloda, bir ilçede aralık ayı içinde, bir haftalık süredeki en yüksek sıcaklık değerleri verilmiştir. Bu verileri hangi grafik türü ile göstereceğimizi açıklayalım ve bu grafiği çizelim.

Tablo: Haftalık En Yüksek Sıcaklık

Gün	Pt.	Sa.	Ça.	Pe.	Cu.	Ct.	Pa
Sıcaklık	3°	7°	9°	9°	4°	5°	7°

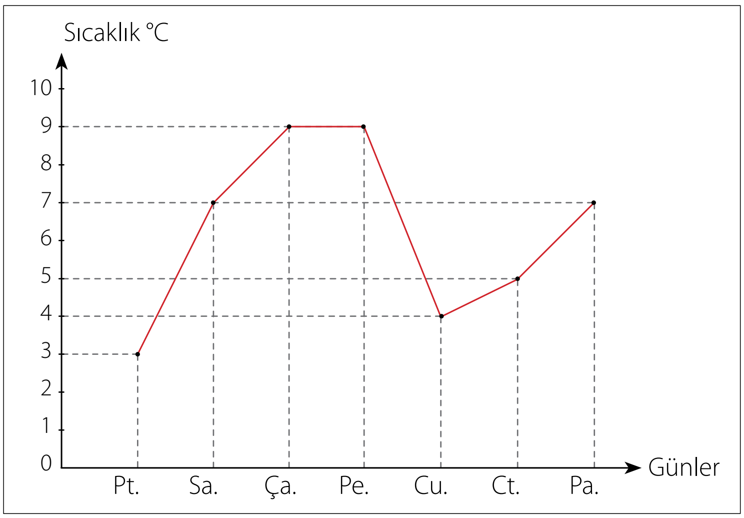
Çözüm

Tabloda 7 günlük sıcaklık değerleri verilmiştir. Sıcaklıktaki artış ve azalışın grafikte net olarak görülebilmesi gerekir. Bunun için çizgi grafiğini çizelim.

Bilgi Kutusu

Çizgi grafiği, artış ve azalışlara vurgu yapmak için kullanılır. Veriler birbirini takip eder.

Grafik: Haftalık En Yüksek Sıcaklık



Grafikten anlaşıldığı gibi ilçede sıcaklık hafta başından itibaren artmış, cuma günü azalıp hafta sonu yeniden artmıştır. Bu hafta görülen en düşük sıcaklık 3°, en yüksek sıcaklık 9°dir.

3. Örnek

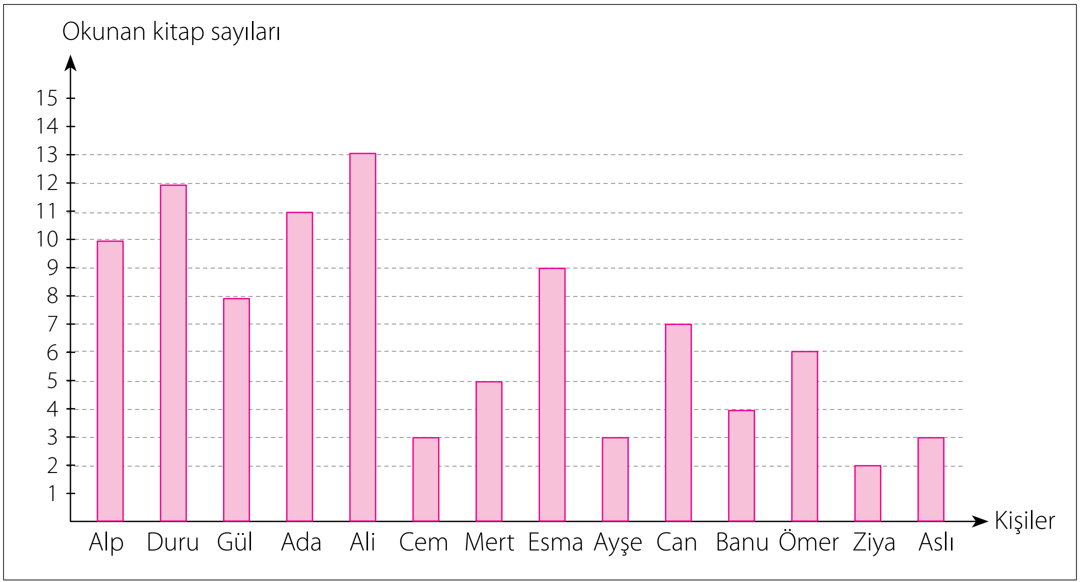
Aşağıdaki sıklık tablosunda 14 öğrencinin bir dönemde okuduğu kitap sayıları görülmektedir. Bu duruma uygun grafiği çizelim.

Öğrencilerin adı	Alp	Duru	Gül	Ada	Ali	Cem	Mert	Esma	Ayşe	Can	Banu	Ömer	Ziya	Aslı
Kitap sayısı	10	12	8	11	13	3	5	9	3	7	4	6	2	3

Çözüm

Öğrencilerin okuduğu kitap sayıları birbirinden bağımsızdır. Bu yüzden verileri sütun grafiği ile gösterelim.

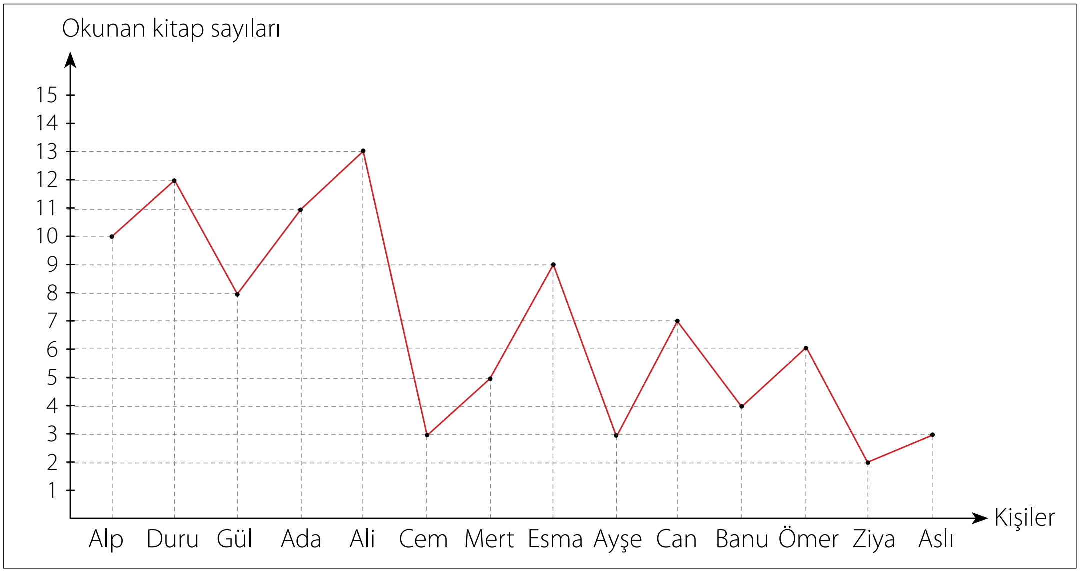
Grafik: Okunan Kitap Sayısı



En çok kitap okuyan öğrenci Ali, en az kitap okuyan öğrenci ise Ziya'dır. Bu iki öğrencinin okuduğu kitap sayıları arasındaki fark 13 – 2 = 11'dir. 14 öğrencinin okuduğu toplam kitap sayısı 96'dır.

Sütun grafiği ile gösterdiğimiz verileri bir de çizgi grafiği ile gösterelim.

Grafik: Okunan Kitap Sayısı



Öğrencilerin okuduğu kitap sayıları birbirinden bağımsız olduğundan çizgi grafiği, bu verileri göstermek için uygun olmamıştır. Öğrencilerin okuduğu kitap sayıları arasındaki artış azalışları görmek anlamsızdır. Çünkü öğrenciler birbirinden bağımsız olarak kitap okumuşlardır. Bu tür verileri karşılaştırmak için sütun grafiği daha uygundur.

Etkinlik

- Bir sınıfta yapılan araştırmada öğrencilere kardeş sayıları sorulmuş ve elde edilen veriler tablo hâlinde gösterilmiştir.

Ailedeki Kardeş Sayısı	Öğrenci Sayısı
0	3
1	15
2	9
3	2
3'ten fazla	1

- Yukarıdaki sıklık tablosuna göre sütun grafiği oluşturunuz.
- Oluşan sütunları keserek uç uca ekleyiniz. Çember oluşturacak şekilde iki ucunu bantlayınız.
- Çemberin merkezini tahmin ediniz ve merkezden sütunların birleşim yerlerine çizgiler çiziniz.

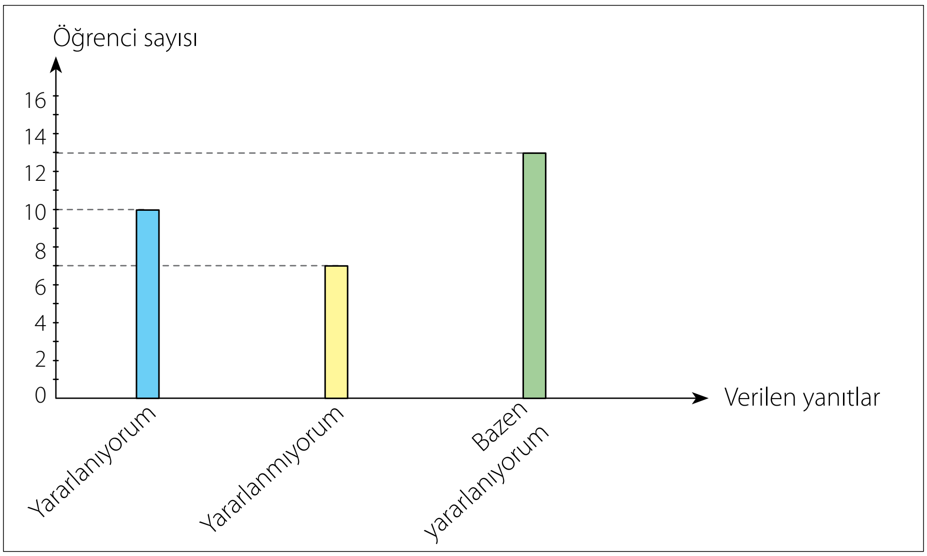
✓ Oluşan grafik için ne söyleyebilirsiniz?

✓ Oluşan her bir parçanın yüzdelik dilimini hesaplayabilir misiniz? Arkadaşlarınızla tartışınız.

4. Örnek

Burak, sınıfındaki arkadaşlarına yabancı dillerini geliştirmek için kütüphanede bulunan yabancı dil kitaplarından kütüphaneden yararlanıp yararlanmadıklarını sordu ve aldığı yanıtlara göre aşağıdaki sütun grafiğini oluşturdu.

Grafik: Kütüphaneden Yararlanma Durumu



Sütun grafiğine ait sıklık tablosunu oluşturalım ve daire grafiğini çizelim.

Çözüm

Tablo: Kütüphaneden Yararlanma

Verilen Yanıtlar	Öğrenci Saysı
Yararlanıyorum	10
Yararlanmıyorum	7
Bazen yararlanıyorum	13
Toplam öğrenci sayısı	30

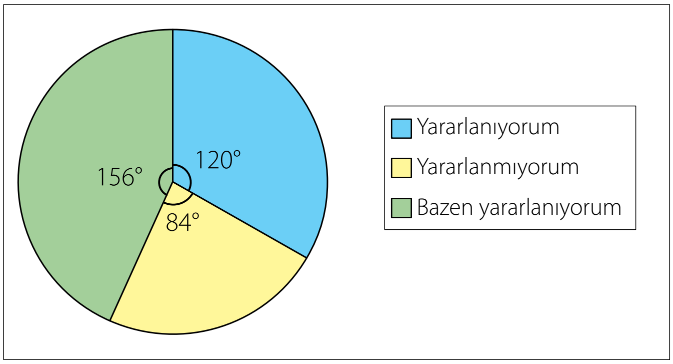
Daire grafiğinde her bir alan için merkez açıyı hesaplayalım.

Yararlanıyorum için $\frac{10}{30} \cdot 360° = 120°$ Yüzde oranı $= \frac{10}{30} \cong 0,33 = \%33$

Yaralanmıyorum için $\frac{7}{30} \cdot 360° = 84°$ Yüzde oranı $= \frac{7}{30} \cong 0,23 = \%23$

Bazen yararlanıyorum için $\frac{13}{30} \cdot 360° = 156°$ Yüzde oranı $= \frac{13}{30} \cong 0,43 = \%43$

Grafik: Kütüphaneden Yararlanma



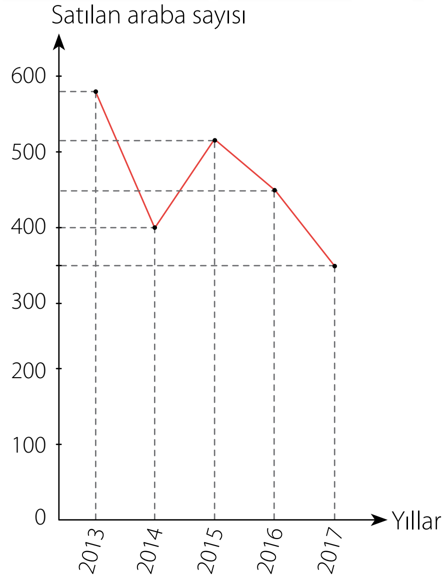
5. Örnek

Bir araba galerisinin son 5 yıllık satışları yandaki tabloda ve tabloya göre hazırlanmış grafiklerde verilmiştir. Grafikleri inceleyelim. Araba galerisinin satış grafiklerini karşılaştırdığımızda hangi grafik daha gerçekçidir? Açıklayalım.

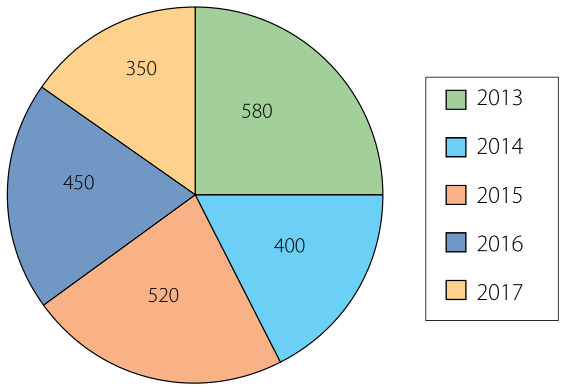
Tablo: Yıllık Araba Satışları

Yıllar	Satılan Araba Sayısı
2013	580
2014	400
2015	520
2016	450
2017	350

Grafik 1: Araba Satışı



Grafik 2: Araba Satışı



Çözüm

Daire grafiğinde hangi yılda ne kadar araba satışı yapıldığı görülmektedir. Çizgi grafiğinde ise yıllara göre araba satışlarındaki artış ve azalış net olarak görülmektedir. Araba satışlarının yıllara göre karşılaştırılması için çizgi grafiği daha uygundur.

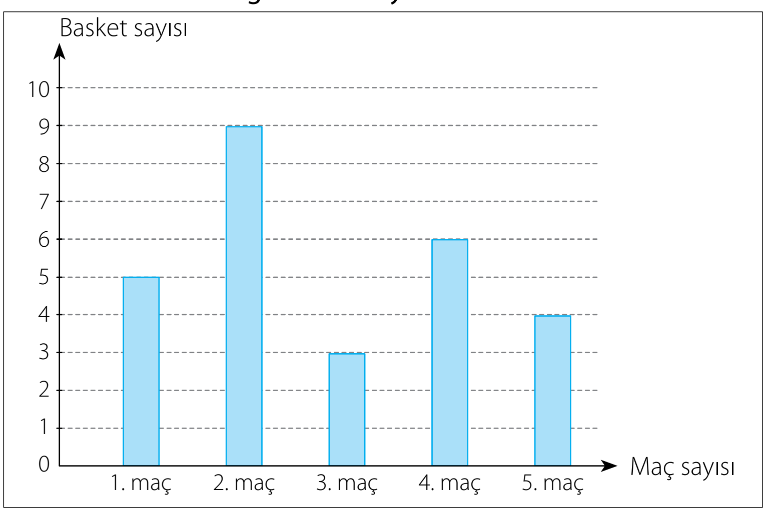
6. Örnek

Yandaki tabloda Efe ve Mert'in son 5 maçta attığı basket sayıları verilmiştir.

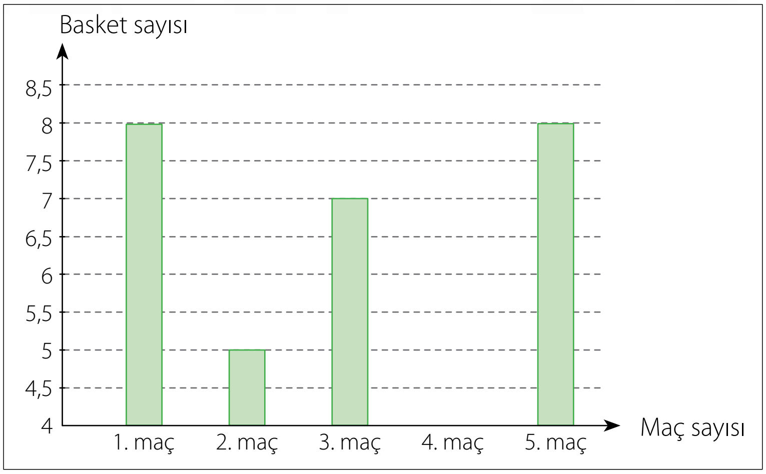
	1. Maç	2. Maç	3. Maç	4. Maç	5. Maç
Mert	5	9	3	6	4
Efe	8	5	7	4	8

Mert'in attığı basket sayıları Grafik 1'de, Efe'nin attığı basket sayıları Grafik 2'de gösterilmiştir. Aşağıda çizilen grafikleri inceleyelim. Hangi grafiğin yanlış anlamalara sebep olabileceğini belirleyelim.

Grafik 1: Mert'in Attığı Basket Sayıları



Grafik 2: Efe'nin Attığı Basket Sayıları



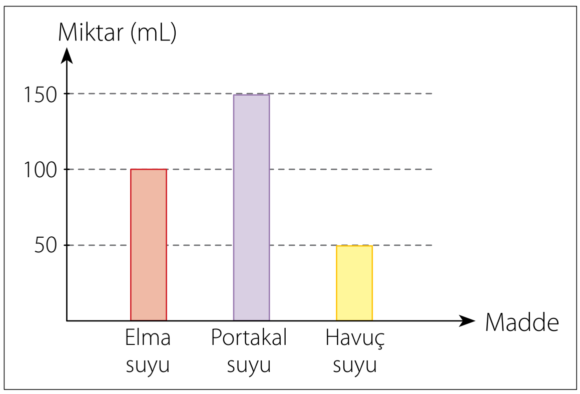
Çözüm

Efe'nin attığı basket sayıları ile ilgili grafikte, Efe'nin 4. maçta hiç basket atmadığı görülmektedir. Oysaki öyle bir durum söz konusu değildir. Bunun sebebi grafiğin 0 yerine, 4'ten başlamasıdır. Bu durum yanlış anlamalara sebep olmaktadır. Mert'in attığı basket sayıları ile ilgili grafik doğrudur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Yandaki sütun grafiği bir meyve kokteylinde kullanılan meyve sularının miktarlarını göstermektedir. Gösterim, daire grafiği ile yapılırsa meyve sularını belirten merkez açıların ölçüleri kaçar derece olur?

Grafik: Kokteyldeki Oranlar



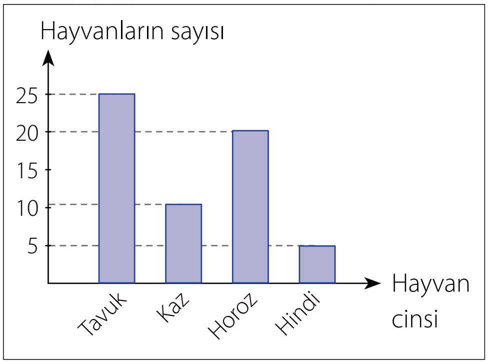
2. Ümit, okuldaki arkadaşlarına hangi spor dalını sevdiklerini sordu ve aldığı yanıtlarla sıklık tablosu oluşturdu. Tabloya uygun grafiği çiziniz.

Tablo: Sevilen Spor Dalları

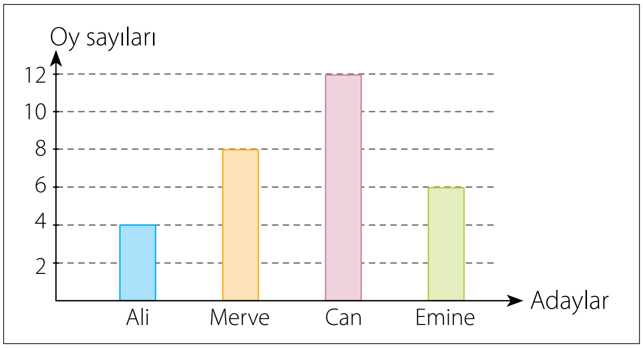
Spor Dalı	Sayı
Futbol	310
Basketbol	190
Atletizm	80
Voleybol	120
Hentbol	20

3. Yanda verilen sütun grafiği, bir çiftlikte bulunan kümes hayvanların sayılarını göstermektedir. Bu grafiği daire grafiğine dönüştürünüz.

Grafik: Hayvan Sayıları



4. Grafik: Oy Dağılımı



Bir sınıfta yapılan başkanlık seçiminde adayların aldıkları oylar grafikte belirtildiği şekildedir. Grafiği, daire grafiğine dönüştürünüz.

5. Aşağıdaki verileri hangi grafik türü ile göstermenin daha uygun olacağını yazınız.

a) Tablo: Aylara Göre Çalışan İşçi Sayısı

Ocak	Şubat	Mart	Nisan
27 261	29 310	2805	24 456

b) Tablo: Ağrı İlinin Sıcaklık Ortalaması

Nisan Ayı Sıcaklık Ortalaması	Mayıs Ayı Sıcaklık Ortalaması	Haziran Ayı Sıcaklık Ortalaması
17 °C	19 °C	22 °C

c) Tablo: Öğrencilerin Karne Notu

Karne Notu	5	4	3	2	1
Öğrenci Sayısı	7	14	8	3	2

2. Ünite Değerlendirme

1. Aşağıdaki sayılardan kaç tanesi tam karedir?

   -64 27 49 1024 -4 36

   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5

2. Aşağıdakilerden hangisi tam kare sayıdır?

   A) 136 B) 149 C) 164 D) 225

3. Aşağıdaki kareköklü ifadelerin hangisi irrasyonel sayıdır?

   A) $\sqrt{48}$ B) $\sqrt{49}$

   C) $-\sqrt{25}$ D) $\sqrt{729}$

4. $\sqrt{9-3x}$ ifadesi veriliyor. Buna göre x, aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

   A) 4 B) 2 C) 1 D) -2

5. Aşağıdakilerden hangisinin sonucu irrasyonel sayıdır?

   A) $\sqrt{16}-4$ B) $1-\sqrt{12}$

   C) $\sqrt{25}-\sqrt{9}$ D) $\frac{3}{7}-\sqrt{9}$

6. Aşağıdaki eşitliklerden kaç tanesi doğrudur?

   I. $11\sqrt{2}=\sqrt{242}$

   II. $6\sqrt{3}=\sqrt{54}$

   III. $9\sqrt{5}=\sqrt{405}$

   IV. $10\sqrt{6}=\sqrt{60}$

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

7. Aşağıdaki kareköklü ifadelerden eşit olanları eşleştiriniz.

   a) $5\sqrt{3}$ I. $\sqrt{54}$

   b) $2\sqrt{5}$ II. $\sqrt{32}$

   c) $3\sqrt{6}$ III. $\sqrt{20}$

   ç) $4\sqrt{2}$ IV. $\sqrt{75}$

8. $\sqrt{64}+\sqrt{36}-\sqrt{25}$ işleminin sonucu kaçtır?

   A) 7 B) 8 C) 9 D) 10

9. $\sqrt{0,81}+\sqrt{1,21}-\sqrt{0,25}$ işleminin sonucu kaçtır?

   A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{4}{10}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{3}{2}$

10. $\dfrac{\sqrt{0,16}}{\sqrt{0,09}\cdot\sqrt{0,04}}$ işleminin sonucu kaçtır?

    A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{20}{3}$ D) $\frac{15}{2}$

11. $\sqrt{124}$ sayısının değeri aşağıda verilen sayılardan hangisine daha yakındır?

    A) 9 B) 10 C) 11 D) 12

12. Alanı 54 cm^2 olan karenin bir kenar uzunluğu kaç cm'dir?

    A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $9\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{6}$

13. $\sqrt{10-\sqrt{40-\sqrt{13+\sqrt{9}}}} = A$ ise A'nın değeri kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 5 D) 6

14. Alanı 121 m^2 olan kare biçimindeki bir tarlanın çevresi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 11 m B) 22 m C) 33 m D) 44 m

15. $\sqrt{72}+\sqrt{98} = A$ eşitliğini sağlayan A sayısı aşağıdaki sayılardan hangisi ile çarpılırsa sonuç bir rasyonel sayı olur?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{7}$ D) $2\sqrt{7}$

16. $A = \sqrt{80}+\sqrt{45}$ ve $B = \sqrt{5}+\sqrt{20}$ ise; A – B'nin değeri nedir?

A) $5\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{5}$

17. $x = \sqrt{2}$ olduğuna göre $\sqrt{8}+\sqrt{128}-\sqrt{50}$ ifadesinin x cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2x B) 3x C) 4x D) 5x

18. $\sqrt{147}+\sqrt{175}-\sqrt{75} = a\sqrt{3}+b\sqrt{7}$ ise; a + b aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10 B) 7 C) 6 D) 5

19. $\dfrac{3^2-\sqrt{81}}{6}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$

20. $\sqrt{3}\cdot(\sqrt{27}-\sqrt{75})$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 9 B) 6 C) –6 D) –9

21. $\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{18}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $3\sqrt{3}$

22. $\dfrac{\sqrt{54}+2\sqrt{24}}{5\sqrt{6}-\sqrt{96}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) $\sqrt{6}$ C) 5 D) 7

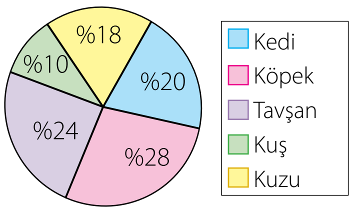
23.

Meyve Suyu Çeşitleri	Sayı
Portakal	5
Şeftali	20
Kayısı	15
Elma	13
Karışık	7

Bir grup öğrenciye, hangi meyve suyunu sevdikleri sorulmuş ve yukarıdaki sıklık tablosu oluşturulmuştur. Bu tablo, daire grafiğinde gösterilecek olursa kayısı suyunu gösteren daire diliminin merkez açısı kaç derece olur?

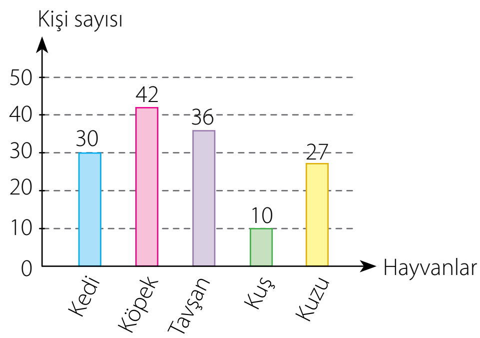
A) 75° B) 80° C) 85° D) 90°

24. Bir okuldaki 150 öğrenciye hangi hayvanı sevdikleri sorulmuş ve verilen yanıtlarla aşağıdaki daire grafiği oluşturulmuştur.

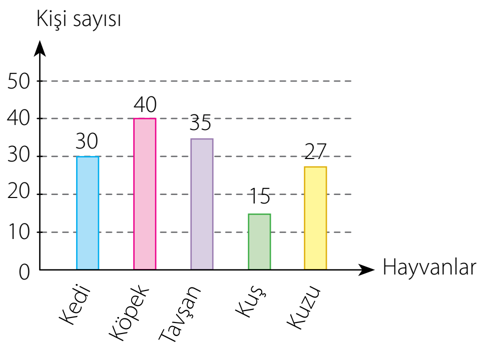


y ekseni kişi sayısını belirtmek üzere daire grafiğinin sütun grafiğine dönüştürülmüş hâli aşağıdakilerden hangisidir?

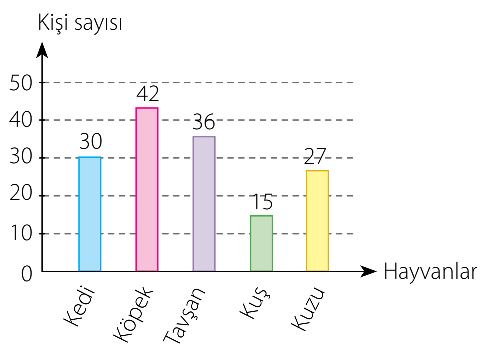
A)



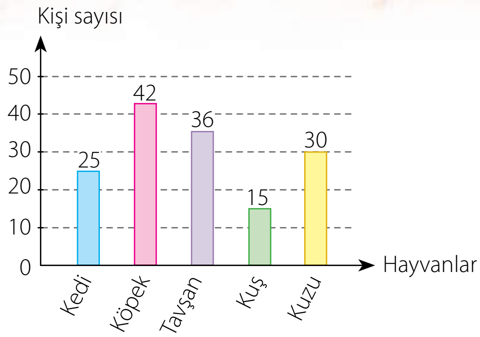
B)



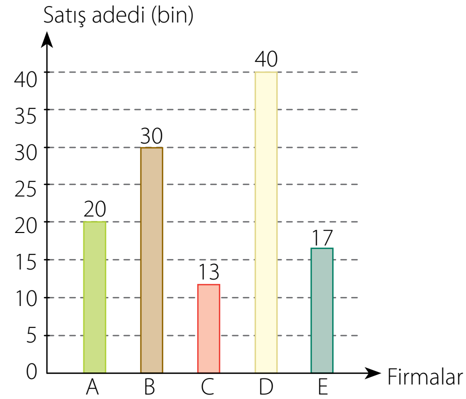
C)



D)



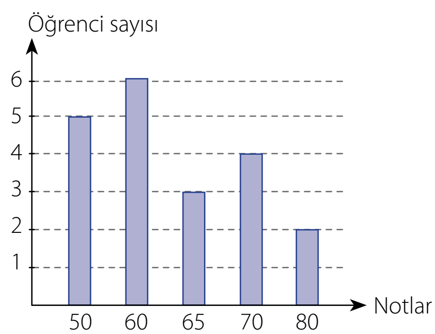
25. Grafik: Satış Miktarı



A, B, C, D, E firmalarının aylık satış miktarları sütun grafiğinde gösterilmiştir. Bu veriler daire grafiğiyle gösterildiğinde C firmasının satış miktarını gösteren daire diliminin merkez açısı kaç derece olur?

A) 32° B) 39° C) 42° D) 45°

26. Grafik: Öğrenci Notları



Yukarıdaki sütun grafiğinde öğrencilerin bir dersten aldığı notlar ve o notun kaç öğrenci tarafından alındığı verilmiştir.

Bu grafiğe ait sıklık tablosunu oluşturunuz.

3. ÜNİTE

OLASILIK VE CEBİR

3.1. Basit Olayların Olma Olasılığı

3.2. Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler

Olasılık kavramının insan düşüncesinde yer edişini binlerce yıl geriye götürmek mümkündür ama matematiğin bir dalı olarak olasılık kuramının doğuşu 17. yüzyılın ortalarına kadar gecikmiştir. 1494 yılında Fra Luca Paccioli'nin (Faruka Paçioli) yazdığı kitap, olasılığı konu edinen ilk kitap olarak bilinir. Bu kitap, o dönemde Avrupa'da filizlenmeye başlayan matematiğin ilgi alanına giremedi. Olasılık Kuramının doğuşu Blaise Pascal'ın (Bleyz Paskal) Pierre de Fermat (Pier de Fermat) ile mektuplaşarak fikir alışverişinde bulunmasıyla başladı. Sonunda, matematiğin önemli bir dalı olan Olasılık Kuramını yarattılar.

Bugün Olasılık Kuramı bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim gibi çağdaş insanın yaşamını etkileyen her alana girmiştir. Örneğin bankacılık, sigortacılık, endüstride kalite kontrolü, genetik, gazların kinetik teorisi, kuantum mekaniği gibi pek çok alan olasılık kuramı olmadan ayakta duramaz.

http://www.baskent.edu.tr

3. ÜNİTE

3.1. Bölüm

Basit Olayların Olma Olasılığı

Modern olasılık kuramının temellerinin 16. ve 17. yüzyıllarda atıldığını söylemek yanlış olmaz. Nüfusu hızla artan dünyada bir sonraki yılın ihtiyaçlarını belirleme ve ekonomik öngörülerde bulunma zorunluluğu matematik ve olasılığın gelişmesini sağlamıştır. Günümüzde matematik ve olasılık vazgeçilmezlerimiz arasında yerini almıştır. Siz hissetmeseniz de etrafınızdaki birçok olay, olasılık hesapları temelinde gerçekleşir. Birkaç örnek vermek gerekirse;

- Şehir içinde trafik ışıklarının yanma sırasının ve süresinin belirlenmesi,

- Şehir içinde kullandığımız otobüslerin hangi sıklıkta sefer yapacağı,
- Petrol, altın ve döviz değerlerinin tahmini,
- Bankaların ve şirketlerin müşteri hizmetlerini aradığımızda müşteri temsilcisine bağlanmak için ne kadar bekleyeceğimizin ya da müşteri hizmetlerinde telefonlara cevap verecek kaç kişinin çalışması gerektiğinin belirlenmesi,
- Eldeki verilerle hava durumu tahmini,

gibi olayların birçoğu ön araştırma ve verilerle elde edilenlerin olasılık açısından değerlendirilmesi ile gerçekleşir. Şu an hemen hemen her bilim dalında kullanılan olasılık, birçok alanda araştırmaların temelini oluşturuyor.

http://www.bilimgenc.tubitak.gov.tr

Terimler

- *Olasılık*
- *Çıktı*
- *Olay*
- *Eş olasılık*
- *İmkânsız olay*
- *Kesin olay*

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Bir olaya ait olası durumları belirleme*
- *"Daha fazla", "eşit", "daha az" olasılıklı olayları ayırt etme ve bunlara örnek verme*
- *Eşit şansa sahip olan olaylarda her bir çıktının olasılık değerinin eşit olduğunu ve bu değerin $\frac{1}{n}$ olduğunu açıklama*
- *Olasılık değerlerinin 0-1 arasında olduğunu anlama*
- *Basit olayların olma olasılıklarını hesaplama*

3.1.1. Bir Olaya Ait Olası Durumları Belirleme

Havaya atıldıktan sonra yere düşen bir madenî paranın üste gelen yüzünü gözlemleyelim.

Madenî paranın iki yüzü vardır. Bu yüzlerden biri yazı (Y), diğeri turadır (T). Bu durumda madenî para havaya atıldığında ya yazı ya da tura gelir.

Aynı anda havaya atıldıktan sonra yere düşen iki madenî paranın üste gelen yüzlerini gözlemleyelim.

Bu paralar havaya atılıp yere düştüğünde üste gelen yüzlerinde hangi durumların gözlemlenebileceği ile ilgili bir tablo hazırlayalım.

1. Madenî Para	2. Madenî Para
Y	Y
Y	T
T	Y
T	T

Tablodan da anlaşılacağı gibi aynı anda havaya atıldıktan sonra yere düşen iki madenî paranın üste gelen yüzleri gözlemlendiğinde dört olası durumun olduğu fark edilir.

Bilgi Kutusu

*Bir durumla ilgili elde edilecek sonuçların belirlenmesi için yapılan işlemde, elde edilen sonuçların her birine **çıktı** denir.*

Örneğin,

*Bir madenî para havaya atılıp yere düştüğünde olası tüm çıktılar yazı ve turadır. Tura ya da yazı gelmesinin istenmesi ise **olay**dır.*

1. Örnek

Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki noktaların sayısı gözlemleniyor. Bu sayının 4'ten büyük olma olayını ve bu olayın çıktılarını yazalım.

Çözüm

Zar, küp biçimindedir ve zarın 6 yüzü vardır. Zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki noktaların sayısı 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 olabilir.

Olay: Zarın üste gelen yüzündeki noktaların sayısının 4'ten büyük olması

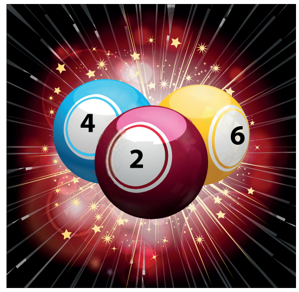
Olayın çıktısı: 5, 6

Bu durumda bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki noktaların sayısının 4'ten büyük olması olayında iki olası durum vardır.

Sıra Sizde

Bir zar atılarak zarın üste gelen yüzündeki noktaların sayısı gözlemleniyor. Üste gelen yüzdeki noktaların sayısının tek sayı olma olayını ve bu olayın çıktılarını yazınız.

2. Örnek



Koyu renkli bir torbanın içine 1'den 7'ye kadar numaralandırılmış eş özellikteki toplar atılıyor. Bu torbadan rastgele çekilen bir topun üzerindeki numaranın çift sayı olmasıyla ilgili durumları inceleyelim.

Çözüm

Torbada 7 tane top vardır.

Olay: Torbadan çift numaralı topun çekilmesi

Olayın çıktısı: 2, 4, 6

Bu durumda torbadan çift numaralı topun çekilmesi olayında üç olası durum vardır.

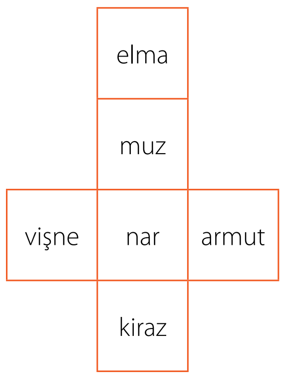
Sıra Sizde

Koyu renkli bir torbanın içine 1'den 10'a kadar numaralandırılmış eş özellikteki toplar atılıyor. Bu torbadan rastgele çekilen bir topun üzerindeki numaranın asal sayı olma durumu ile ilgili olayı ve bu olayın çıktılarını yazınız.

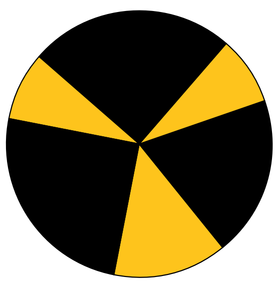
Etkinlik

Araç ve Gereç: karton, cetvel, makas, yapıştırıcı, renkli kalemler

- Kartondan, ayrıtı 3 cm olan bir küp yapınız.
- Küpün üzerine, her yüzünde ayrı bir meyve adı olacak şekilde, sevdiğiniz meyve adlarını yazınız.
  - ✓ Küpü havaya attığınızda küpün üste gelen yüzünde hangi meyvenin adı yazılı olabilir? Bu durumla ilgili olayı ve bu olayın çıktılarını yazınız.



3.1.2. "Daha Fazla", "Eşit", "Daha Az"



Yandaki dairesel bölgeye ufak oklar atıldığında okların siyah bölgeye isabet etme şansı daha fazla, sarı bölgeye isabet etme olasılığı daha azdır. Çünkü siyah bölgenin alanı, sarı bölgeden daha fazladır.

1. Örnek

Koyu renkli bir torbada eş özellikte 5 kırmızı, 7 beyaz renkte boncuk vardır. Bu torbadan çekilecek boncuk olayını inceleyelim.

Çözüm

Torbada 5 + 7 = 12 tane boncuk vardır. Bu boncuklardan herhangi birinin çekilme olasılığı aynıdır. Torbadan rastgele bir boncuk çekildiğinde bu boncuk K K K K K B B B B B B B olabilir.

Torbadan rastgele çekilen bir boncuğun beyaz olma olasılığı, kırmızı olma olasılığına göre daha fazladır. Çünkü torbada beyaz boncuk sayısı daha fazladır.

Torbadan rastgele çekilen bir boncuğun kırmızı olma olasılığı, beyaz olma olasılığına göre daha azdır. Çünkü torbada kırmızı boncuk sayısı daha azdır.

Bilgi Kutusu

Bir olayın olmasının ya da olmamasının matematik değeri olasılıktır.

Sıra Sizde

Koyu renkli bir torbada eş özellikte 8 mavi, 12 beyaz renkte boncuk vardır. Bu torbadan çekilen boncuğun;

- **Hangi renkte olma olasılığı daha fazladır? Neden?**
- **Hangi renkte olma olasılığı daha azdır? Neden?**

2. Örnek

Bir madenî para havaya atılıp yere düştüğünde paranın üste gelen yüzünün yazı ya da tura olma olasılığını inceleyelim.

Çözüm

Madenî para havaya atılıp yere düştüğünde yazı ya da tura gelebilir. Bu durumda, her iki çıktının gelme olasılığı eşittir.

3. Örnek

28 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin 14'ü kızdır. Sınıftaki öğrencilerin adları eş özellikli kartlara yazılarak bir torbaya atılıyor. Torbadan çekilen kartta kız ya da erkek adı yazılı olma durumunu inceleyelim.

Çözüm

Torbada 28 ad vardır. Bu adlardan 14'ü kız, 14'ü erkek adıdır. O hâlde çekilen bir kartta kız adı yazılı olma olasılığı ile erkek adı yazılı olma olasılığı eşittir.

Sıra Sizde

Bir torbada 1'den 100'e kadar numaralandırılmış eş özellikte kartlar vardır. Bu torbadan rastgele çekilen bir karttaki numaranın tek ya da çift sayı olma olasılığını karşılaştırınız.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Bir torbada, eş özellikte 3 kırmızı, 5 beyaz bilye vardır. Torbadan rastgele bir bilye çekildiğinde bilyenin beyaz olması bekleniyor. Bu durumda olay ve olayın çıktıları ne olur?

2. İki zar birlikte atıldığında zarların üste gelen yüzlerindeki noktaların toplamının 15 olması isteniyor. Bu durumda olası tüm çıktıları, olayı ve bu olayın çıktılarını yazınız.

3. Aşağıdaki olaylardan hangisinin olma olasılığı daha fazladır?

A) Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının tek sayı olması

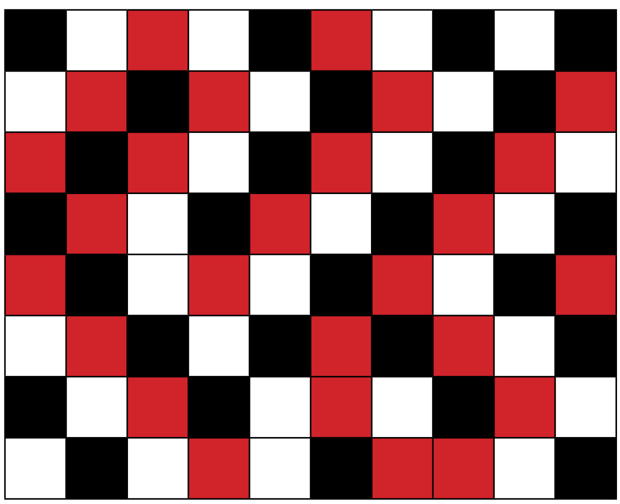
B) Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının çift sayı olması

C) Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının 6 olması

D) Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının 6'dan küçük olması

4. 26'sının kız olduğu 78 kişilik bir gruptan rastgele seçilen bir kişinin kız olma olasılığı ile erkek olma olasılığını karşılaştırınız.

5. Aşağıdaki tabloda rastgele bir kareye dokunduğunuzda bu karenin siyah, beyaz ve kırmızı olma olasılığını karşılaştırınız.



3.1.3. Eşit Şansa Sahip Olan Olaylar

Bir zar atıldığında her bir yüzün üste gelme olasılığı eşittir. Şimdi aşağıdaki soruları yanıtlayalım:

Bir zar atılıyor. Zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının;

a) 4 olma olasılığı nedir?

b) 1 olma olasılığı nedir?

Atılan zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının gözlemlenmesinde çıktılar; 1, 2, 3, 4, 5 ve 6'dır. Toplam 6 farklı çıktı vardır.

a) A olayı: Zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının 4 olması

A olayının çıktısı: 4 — A olayının çıktı sayısı: 1

Olası tüm çıktıların sayısı: 6 — A olayının olma olasılığı $= \frac{1}{6}$

b) B olayı: Zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının 1 olması

B olayının çıktısı: 1 — B olayının çıktı sayısı: 1

Olası tüm çıktıların sayısı: 6 — B olayının olma olasılığı $= \frac{1}{6}$

Zar atıldığında, zarın üste gelen yüzlerindeki nokta sayısı farklıdır. Ancak, her bir yüzün üste gelme olasılığı eşittir. Bu olasılık $\frac{1}{6}$ olur. Her bir yüzün üste gelme şansı eşit olduğundan her bir çıktı eş olasılıklıdır.

Olasılık, bir olayın olma şansına ilişkin bir ölçümdür. Bu durumda, yukarıda sözü edilen olayın tüm çıktılarının olma şansına ilişkin ölçme sonucu $\frac{1}{6}$ olur.

Bilgi Kutusu

Eşit şansa sahip olan olaylarda her bir çıktı, eş olasılıklıdır. Bu durumda "n" olası durum sayısını göstermek üzere her bir çıktının olasılık değeri $\frac{1}{n}$'dir.

1. Örnek

Aşağıda verilen olaylardan eşit şansa sahip olan olaylar ile eşit şansa sahip olmayan olayları belirleyelim.

a) Bir torbada 10 kırmızı, 5 sarı bilye vardır. Kırmızı bilye çekme şansı ile sarı bilye çekme şansı

b) 28 kişilik boş bir midibüse binme sırasında 2. sırada olan Ayşe ile 30. sırada olan Ahmet'in bir koltuğa oturma şansı

c) Bir madeni para atıldığında yazı veya tura gelme şansı

ç) Bir işletme işe alacağı elemanları sadece sınavla seçmektedir. Bu sınava giren ve aynı puanı alan Merve ve Büşra'nın işe alınma şansları

Çözüm

a) Torbada kırmızı bilye sayısı daha fazla olduğundan kırmızı bilye seçilme şansı daha fazladır. Sarı bilye çekme şansı ile kırmızı bilye çekme şansı eşit değildir. Bu olaylar eşit şansa sahip değildir.

b) Ayşe 2. sırada olduğundan otobüse bindiğinde bir koltuğa oturma şansı daha fazladır. Ayşe ile Ahmet'in otobüse bindiklerinde bir koltuğa oturma şansları eşit değildir. Bu olaylar eşit şansa sahip değildir.

c) Madeni paranın bir yüzü tura, bir yüzü yazıdır. Madeni para atıldığında tura ya da yazı gelme şansı eşittir. Bu olaylar eşit şansa sahiptir.

ç) Merve ve Büşra işe kabul edilmek için girdikleri sınavda aynı puanı almışlardır. Bu sebeple ikisinin de işe alınma şansları eşittir. Bu olaylar eşit şansa sahiptir.

2. Örnek

"İSTANBUL" kelimesinin her bir harfi eş özellikteki kartlara yazılarak kartlar bir torbaya atılıyor. Torbadan çekilen bir kartta "B" harfinin yazılı olma olasılığını hesaplayalım.

Çözüm

Torbadaki kartlar eş özelliktedir ve her bir kartta farklı bir harf yazmaktadır. O hâlde her bir kartın çekilme şansı eşittir.

Olası tüm çıktıları: İ, S, T, A, N, B, U, L

Olası tüm çıktıların sayısı: 8

A olayı: "B" yazılı kartın çekilmesi

A olayının çıktı sayısı: 1

A olayının olma olasılığı $= \frac{1}{8}$ olur.

Sıra Sizde

"TRABZON" kelimesinin her bir harfi eş özellikteki kartlara yazılarak kartlar bir torbaya atılıyor. Torbadan çekilen bir kartta;

a) "Z" harfinin yazılı olma olasılığını hesaplayınız.

b) "A" harfinin yazılı olma olasılığını hesaplayınız.

c) "T" harfinin yazılı olma olasılığını hesaplayınız.

3.1.4. Olasılık Değeri

Bir kutunun içinde; üzerinde1'den 10'a kadar numaralandırılmış, eş özellikteki toplar vardır. Buna göre aşağıdaki tabloyu inceleyelim. Olasılık değerlerinin hangi aralıkta olduğunu bulalım.

Olası Tüm Durumların Sayısı:10			
Olay	Çıktılar	Çıktı Sayısı	Olayın Olma Olasılığı
3 numaralı topun çekilme olasılığı	3	1	$\frac{1}{10} = 0,1$
Çift numaralı topun çekilme olasılığı	2, 4, 6, 8, 10	5	$\frac{5}{10} = 0,5$
7'den küçük numaralı topların çekilme olasılığı	1, 2, 3, 4, 5, 6	6	$\frac{6}{10} = 0,6$
Asal sayı numaralı topların çekilme olasılığı	2, 3, 5, 7	4	$\frac{4}{10} = 0,4$
4'ten büyük, tek numaralı topların çekilme olasılığı	5, 7, 9	3	$\frac{3}{10} = 0,3$

Olayların olma olasılıklarının hangi aralıkta değer aldıklarına bakalım.

$0 \leq 0,1 \leq 1$ $\quad 0 \leq 0,5 \leq 1$ $\quad 0 \leq 0,6 \leq 1$ $\quad 0 \leq 0,4 \leq 1$ $\quad 0 \leq 0,3 \leq 1$

Bu durumda olasılık değerlerinin 0-1 arasında (0 ve 1 dahil) olduğu görülmektedir.

Bilgi Kutusu

Olasılık değerleri 0 ile 1 (0 ve 1 dâhil) arasındadır.

1. Örnek

İçinde 9 tane beyaz top bulunan bir kutudan rastgele bir top çekiliyor. Çekilen topun;

a) Beyaz olma olasılığını bulalım.

b) Kırmızı olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Torbada 9 tane top olduğundan olası tüm durumların sayısı 9'dur.

a) Torbadaki tüm toplar beyaz renkte olduğundan çekilen top kesinlikle beyaz renkte olacaktır. Bu olay kesin olaydır ve olasılık değeri 1'dir.

b) Torbada kırmızı renkte top yoktur. Dolayısıyla torbadan kırmızı renkte top çekilemez. Bu olay imkânsız olaydır ve olayın olasılık değeri 0'dır.

Bilgi Kutusu

Olasılık değeri, "1" olan olaya ***kesin olay*** *denir.*

Olasılık değeri, "0" olan olaya ***imkânsız olay*** *denir.*

Sıra Sizde

İçinde harf yazılı kartlar bulunan torbadan rastgele bir kart çekiliyor. Çekilen kartın üzerinde;

a) Harf yazılı olma olasılığını bulunuz.

b) Rakam yazılı olma olasılığını bulunuz.

2. Örnek

Bir zar havaya atılıyor. Buna göre;

a) Zarın üst yüzünde gözlemlenen sayının "5" olma olasılığını bulalım.

b) Zarın üst yüzünde gözlemlenen sayının "5" olmama olasılığını bulalım.

Çözüm

Zarın 6 tane yüzü vardır. O hâlde olası tüm çıktıların sayısı 6'dır.

a) A olayı: Zarın üste gelen yüzünde gözlemlenen sayı 5 olması,

A olayının olma olasılığı: $\frac{1}{6}$

b) Zarın üst yüzünde gözlemlenen sayının "5" olmama olasılığı $\frac{5}{6}$ dır. Çünkü 5 olmaması durumu üst yüzünde 1, 2, 3, 4 ve 6 gibi 5 farklı sayı olmalıdır.

Zarın üst yüzünde gözlemlenen sayının "5" olma olasılığı ile "5" olmama olasılıklarını toplayalım.

$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{6}{6}=1$ olur. Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığının toplamı 1'dir.

Bilgi Kutusu

Bir olayın olma olasılığı ile olmama olasılığının toplamı 1'dir.

3. Örnek

Aşağıdaki olaylardan kesin ve imkânsız olanları belirleyelim.

a) Havaya atılan bir topun yere düşmesi

b) Yüzlerinde "İlke, Kemal, Emine, Mert, Ecrin, Mustafa" yazılı olan bir küp havaya atılıp yere düştüğünde küpün üste gelen yüzünde gözlemlenen ismin "Burcu" olması

c) Bir zar atıldığında üste gelen yüzde gözlemlenen noktaların sayısının 12 ile tam bölünmesi

ç) İçinde kırmızı, sarı ve beyaz boncukların bulunduğu bir torbadan mavi boncuk çekilmesi

Çözüm

a) Havaya atılan top, yer çekimi etkisiyle mutlaka yere düşer. O hâlde bu olay kesin olaydır.

b) Küpün herhangi bir yüzünde Burcu adı yazmadığı için küp havaya atıldığında küpün üste gelen yüzünde Burcu adı yazmaz. O hâlde bu olay imkânsız olaydır.

c) Bir zar atıldığında üste gelen yüzdeki noktaların sayısı 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 olabilir. bu sayıların hiçbiri 12 ile tam bölünemez. O hâlde bu olay imkansız olaydır.

ç) İçinde kırmızı, sarı ve beyaz renkte boncukların olduğu bir torbadan mavi renkte bir boncuk çekilemez. O hâlde bu olay imkânsız olaydır.

Sıra Sizde

Aşağıdaki olaylardan kesin ve imkânsız olanları belirleyerek nedenlerini açıklayınız.

a) 10 kişilik bir sınıftaki tüm öğrenciler kızdır. Bu sınıftan bir kız öğrencinin başkan olması

b) "BALIKESİR" kelimesinin harfleri eş özellikte kartlara yazılarak kartlar bir kutuya atılıyor. Bu kutudan rastgele çekilen bir kartta "D" harfinin yazılı olması

c) 60 sayfalık bir kitaptan rastgele açılan bir sayfanın numarasının 61'den küçük olması

ç) Sürücü belgesi sınavına başvurmayan birinin sınavda başarılı olması

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Bir olayın olma olasılığı aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

A) 1 B) 0 C) $\frac{10}{9}$ D) $\frac{1}{2}$

2. Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanların başındaki kutucuğa "D", yanlış olanların başındaki kutucuğa "Y" yazınız.

☐ 5. kattan atılan bir yumurtanın beton zemine çarptığında kırılmaması olayı kesin bir olaydır.

☐ Bolu Dağı'nın, Adıyaman il sınırları içinde bulunma olasılığı imkânsız bir olaydır.

☐ Umut, temmuz ayında doğduğuna göre doğum gününün 3 Temmuz olması olasılığı $\frac{1}{31}$ olur.

☐ İçinde 5 sarı ve 6 mavi kart bulunan torbadan rastgele bir kart çekildiğinde kırmızı kart gelmesi olayı kesin bir olaydır.

3. Bir kutunun içinde 50 tane eş özellikte kırmızı düğme vardır. Kutudan rastgele çekilen bir düğmenin;

a) Mavi olma olasılığı nedir?

b) Kırmızı olma olasılığı nedir?

c) Sarı olma olasılığı nedir?

4. Atakan'ın bir kutu boya kalemi vardır. Bu kutuda biri siyah olmak üzere 12 adet farklı renkte boya kalemi bulunmaktadır. Atakan, resim yaparken kutudan rastgele bir boya kalemi seçtiğinde bu kalemin siyah olma olasılığı kaçtır?

5. Muratların sınıfında 34 öğrenci vardır. Sınıftan rastgele bir öğrenci seçildiğinde bu öğrencinin Murat olma olasılığı kaçtır?

3.1.5. Basit Olayların Olma Olasılıkları

Basit olayların olma olasılıklarını hesaplayabiliriz. Bunun için aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Bilgi Kutusu

Bir olayın çıktı sayısının olası tüm çıktılarının sayısına oranı, o olayın olma olasılığıdır (olasılık değeri).

$$\text{Olayın olma olasılığı} = \frac{\text{Olayın çıktı sayısı}}{\text{Olası tüm çıktıların sayısı}}$$

1. Örnek

Arka arkaya iki kez havaya atılan bir madenî para yere düştüğünde iki kez tura gelme olasılığını bulalım.

Çözüm

Bu duruma ait bir şema çizelim ve olayın çıktılarını yazalım.

1. atılışı	2. atılışı
Y	Y
	T
T	Y
	T

Olası tüm çıktılar: YY, YT, TY, TT

Olası tüm çıktıların sayısı: 4

A olayı: TT

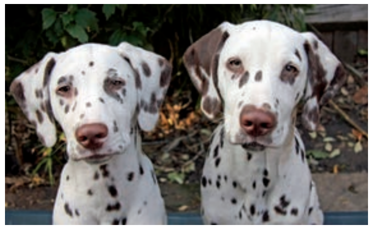
A olayının çıktı sayısı: 1

A olayının olma olasılığı: $\frac{1}{4}$'tür.

Sıra Sizde

Bir zar arka arkaya iki kez havaya atılıyor. Üste gelen yüzünün ikisinde de 3 olma olasılığını bulunuz.

2. Örnek



Tuğba, gittikleri hayvan barınağında 6 dişi, 4 erkek dalmaçyalı yavrusundan birini seçecektir. Gözünü kapatarak rastgele birine dokunduğunda bu köpeğin erkek olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Dalmaçyalı yavru köpekler eş özelliktedir. Her birinin seçilme şansı eşittir.

Toplam 10 adet dalmaçyalı köpek yavrusu olduğuna göre olası tüm çıktıların sayısı 10'dur.

A olayı: Seçilen yavrunun erkek olması

A olayının çıktı sayısı: 4 A olayının olma olasılığı $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ olur.

3. Örnek

Eş özellikteki kartlara 6 kadın, 8 erkek adı yazılarak kartlar bir kutuya atılmıştır. Kutudan rastgele seçilecek bir kartın üzerinde kadın adı yazma olasılığını hesaplayalım.

Çözüm

Kutudaki kartların üzerinde 6 kadın, 8 erkek adı yazılı olduğuna göre kutuda toplam 14 kart vardır.

Olası tüm çıktıların sayısı: 14

K olayı: Kutudan rastgele seçilen bir kartın üzerinde kadın adı yazması

K olayının çıktı sayısı: 6

K olayının olma olasılığı $= \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$ olur.

Sıra Sizde

"KIRKLARELİ" kelimesinin her bir harfi eş özellikteki kartlara yazılarak kartlar bir torbaya atılıyor. Torbadan çekilen bir kartta;

a) "K" harfinin yazılı olma olasılığını hesaplayınız.

b) "A" harfinin yazılı olma olasılığını hesaplayınız.

c) "L" harfinin yazılı olma olasılığını hesaplayınız.

4. Örnek

Bir kutuda eş özellikte 6 adet yeşil, 4 adet sarı kalem vardır. Bu kutudan rastgele alınan bir kalemin;

a) Yeşil renkte olma olasılığını hesaplayalım.

b) Sarı renkte olma olasılığını hesaplayalım.

Çözüm

Kutuda $6 + 4 = 10$ tane kalem vardır. Olası tüm çıktıların sayısı: 10

a) Y olayı: Kutudan yeşil renkte kalem çekme

Kutuda 6 tane yeşil kalem vardır. Y olayının çıktılarının sayısı: 6

Y olayının olma olasılığı $= \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ olur.

Bu oran, yüzde ve ondalık gösterim ile de ifade edilebilir.

$\dfrac{6}{10} = 0{,}6$ ya da $\dfrac{6}{10} = \dfrac{60}{100} = \%60$ olur.

Bu durumda kutudan yeşil renkte kalem alma olasılığı 0,6 ya da %60'tır, denebilir.

b) S olayı: Torbadan sarı renkte kalem alma

Kutuda 4 tane sarı kalem vardır. S olayının çıktılarının sayısı: 4

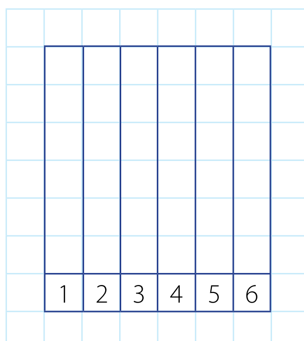
S olayının olma olasılığı $= \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ olur.

$\dfrac{4}{10} = 0{,}4$ ya da $\dfrac{4}{10} = \dfrac{40}{100} = \%40$

Bu durumda kutudan sarı renkte kalem alma olasılığı 0,4 ya da %40'tır.

Etkinlik

Araç ve Gereç: zar, kareli kâğıt, kalem



- Dörder kişilik gruplar oluşturunuz.
- Kareli kâğıda yandaki gibi bir sıklık tablosu hazırlayınız.
- Bir zar atınız ve zarın her bir yüzü en az bir kez üste gelene kadar ilgili sütuna "x" işareti koyunuz.
- Bu işi 5 ya da 6 kez tekrar ediniz. Her durum için yeni bir sıklık tablosu oluşturunuz.
- Oluşturduğunuz tabloları nasıl karşılaştırabileceğinizi tartışınız.
  - ✓ Zarın herhangi bir yüzü, daha çok sayıda üste geldi mi?
  - ✓ Her bir tablo için zarın tüm yüzleri üste gelene kadar kaç atış yaptınız?

- Her bir grubun elde ettiği sonuçları bir panoya yerleştiriniz.
- Elde ettiğiniz tüm sonuçları sınıfça tartışmaya açınız.

✓ Az sayıda yapılan denemelerden elde edilen verilerle çok sayıda yapılan denemelerden elde edilen verileri karşılaştırınız. Nasıl bir sonuç elde ettiniz? Deneme sayısı artıkça aynı sayıdaki noktaların üste gelme olasılığı birbirine yaklaştı mı? Açıklayınız.

5. Örnek

Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının;

a) Çift sayı olma olasılığını bulalım.

b) Asal sayı olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Olası tüm çıktılar: 1, 2, 3, 4, 5, 6　　　Olası tüm çıktıların sayısı: 6

a) Ç olayı: Zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının çift olması

Ç olayının çıktıları: 2, 4, 6　　　Ç olayının çıktılarının sayısı: 3

Ç olayının olma olasılığı $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

$\underset{(5)}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{10} = 0,5$ olur. $\underset{(50)}{\frac{1}{2}} = \frac{50}{100} = \%50$ olur.

Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısı %50 oranında çift sayıdır.

b) A olayı: Zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısının asal olması

A olayının çıktıları: 2, 3, 5　　　A olayının çıktılarının sayısı: 3

A olayının olasılığı $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ olur. $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = \%50$

Bir zar atıldığında zarın üste gelen yüzündeki nokta sayısı %50 oranında asaldır.

6. Örnek

Koyu renkli bir torbada, eş özellikte 5 kırmızı, 4 mavi ve 8 beyaz boncuk vardır. Buna göre torbadan rastgele çekilen bir boncuğun;

a) Mavi olma olasılığını bulalım.

b) Beyaz olma olasılığını bulalım.

c) Kırmızı olma olasılığını bulalım.

Çözüm

Olası tüm çıktılar: K, K, K, K, K, M, M, M, M, B, B, B, B, B, B, B, B

Olası tüm çıktıların sayısı: 17

a) M olayının çıktı sayısı: 4 M olayının olma olasılığı $= \frac{4}{17}$

b) B olayının çıktı sayısı: 8 B olayının olma olasılığı $= \frac{8}{17}$

c) K olayının çıktı sayısı: 5 K olayının olma olasılığı $= \frac{5}{17}$

Sıra Sizde

Koyu renkli bir torbada eş özellikte 5 sarı, 7 yeşil ve 8 siyah boncuk vardır. Buna göre torbadan rastgele çekilen bir boncuğun;

a) Sarı olma olasılığını bulunuz.

b) Yeşil olma olasılığını bulunuz.

c) Siyah olma olasılığını bulunuz.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Bir torbada 5 mavi, 7 siyah, 3 sarı top vardır. Torbadan bir top çekildiğinde topun siyah olma olasılığı nedir?

2. Bir dosyada 10 beyaz, 4 sarı ve 6 pembe kâğıt vardır. Dosyadan rastgele bir kâğıt alındığında kâğıdın pembe olma olasılığı kaçtır?

3. Fikret, arkadaşının vakti olmadığı için onun istediği pantolonu almaya mağazaya gidiyor. Mağazada 12 siyah, 9 gri ve 10 lacivert pantolon vardır. Fikret'in mağazadan rastgele alınan bir pantolonun gri olma olasılığı kaçtır?

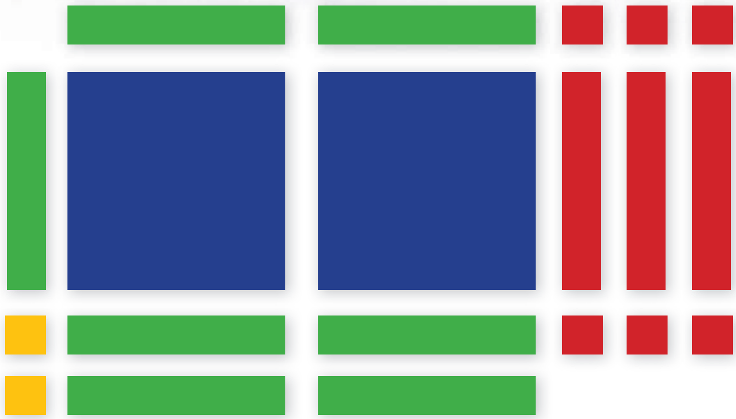
4. Piyanoda 36'sı siyah, geri kalanı beyaz olmak üzere 88 tuş vardır. Ela, rastgele bir tuşa bastığında bu tuşun beyaz olma olasılığı kaçtır?

5. Bir torbada 4 yeşil, 8 mavi, 6 kırmızı ve 5 siyah top vardır. Bu torbadan rastgele çekilen bir top ile ilgili aşağıdaki soruları yanıtlayınız. Çekilen topun;

a) Mavi olma olasılığı nedir? **b)** Yeşil olma olasılığı nedir?

c) Siyah olma olasılığı nedir? **ç)** Kırmızı olma olasılığı nedir?

3.2. Bölüm
Cebirsel İfadeler ve Özdeşlikler

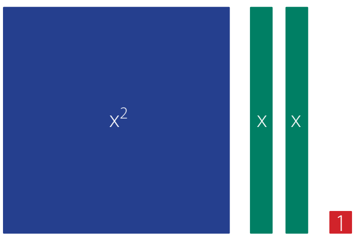


Matematik materyallerinden biri olan cebir karoları, öğrencilerin cebir konusunu daha iyi anlamalarına ve cebirsel düşünme becerilerinin gelişmesine yardımcı olur. Cebir karolarının işleyişinde hem cebir hem geometri yer alır. Bu karolar; öğrencilerin, cebir problemlerini sadece ezbere dayalı yöntemlerle değil, somut materyallerle de ifade etmelerine ve çözmelerine yardımcı olur.

Yukarıdaki resimde görüldüğü gibi dikdörtgenler ve küçük-büyük karelerden olan cebir karolarında 1 küçük karelerle; x, dikdörtgenlerle; x^2 ise büyük karelerle ifade edilir. Büyük karenin bir kenarı, dikdörtgenin uzun kenarına yani x'e eşittir. Cebir karoları, bir cebirsel ifadeyi göstermek için kullanıldığında büyük karenin bir kenarının x, alanının da x^2ye eşit olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca uzun kenarı x olan dikdörtgenin kısa kenarı, küçük karenin bir kenarına yani 1'e eşittir.

blog.metu.edu.tr

Örneğin;



$\rightarrow x^2 + 2x + 1$ olur.

Terimler veya Kavramlar

- *Özdeşlik*
- *Çarpanlara ayırma*

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Basit cebirsel ifadeleri anlama ve farklı biçimlerde yazma*
- *Cebirsel ifadelerin çarpımını yapma*
- *Özdeşlikleri modellerle açıklama*
- *Cebirsel ifadeleri çarpanlara ayırma*

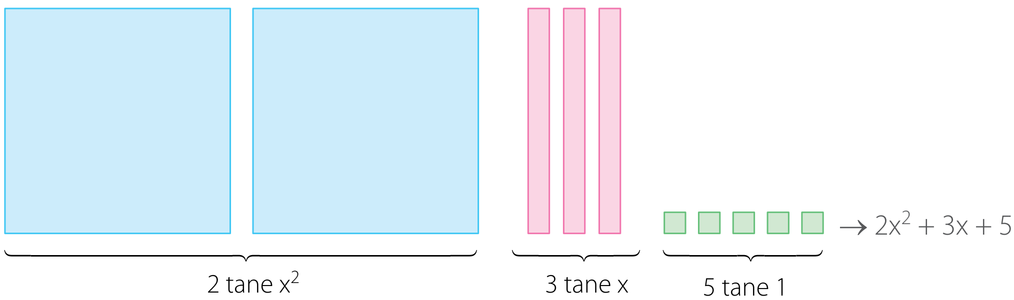
3.2.1. Basit Cebirsel İfadeler

En az bir değişken ve işlem içeren ifadelere, **cebirsel ifadeler** denir. Cebirsel ifadelerdeki harfler, sayıların yerine kullanılmıştır ve değişken olarak adlandırılır.

$3x - 5$, $y^2 - 2y + 1$ ifadeleri cebirsel ifadelerdir. $3x - 5$ ifadesindeki değişken "x", $y^2 - 2y + 1$ ifadesindeki değişken "y"dir.

Bir cebirsel ifadede "+" veya "–" işaretleriyle ayrılan kısımlara **terim**, her bir terimin sayısal çarpanına **katsayı** ve hiçbir değişkene bağlı olmayan terime **sabit terim** denir. Sabit terimde cebirsel ifadenin bir katsayısıdır.

Aşağıda, cebir karoları ile modellenen cebirsel ifadeyi inceleyelim.



$2x^2 + 3x + 5$ cebirsel ifadesinde 2 tane x^2, 3 tane x ve 5 tane 1 olduğundan 2, 3 ve 5 katsayıdır. 5 tane birlik olduğundan 5, sabit terimdir. Bu cebirsel ifadede 3 tane terim vardır. Bunlar $2x^2$, $3x$ ve 5'tir.

Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz. Bu tabloda cebirsel ifadelerin terim, katsayı, sabit terim ve değişkenleri verilmiştir. Buna göre tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız:

Cebirsel İfade	Terimler	Katsayılar	Sabit Terim	Değişken
$2x - 5$	$2x, -5$	$2, -5$	-5	x
$a^2 + 6a - 7$	$a^2, 6a, -7$	$1, 6, -7$	-7	a
$3y^2 - 5y$	$3y^2, -5y$	$3, -5$	0	y
$2a + 3b$	$2a, 3b$	$2, 3$	0	a, b
$3a - 7b$				
$2b + 8$				
$x^2 - 5x + 9$				
$8x^2 + 4x$				
$3x - 7$				
$5a^2 - 4b + 3$				
$2a + 3b - 4$				

1. Örnek

Aşağıdaki cebirsel ifadeleri farklı biçimde yazalım.

a) $x \cdot x$ **b)** $2y \cdot 3y$ **c)** $6 \cdot 5a$

Çözüm

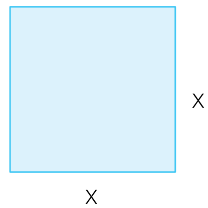
Üslü ifadelerin çarpımından yararlanalım. Üslü ifadeler çarpılırken tabanı aynı olan terimlerin üslerinin toplandığını biliyoruz.

a) $x \cdot x = x^1 \cdot x^1 = x^2$ bulunur.

b) $2y \cdot 3y = 2 \cdot 3 \cdot y \cdot y = 6y^2$ bulunur. (Katsayılar kendi aralarında, değişkenler kendi aralarında çarpılır.)

c) $6 \cdot 5a = 30a$ bulunur.

Bilgi Kutusu



Bir kenarı x olan karenin alanı x^2dir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri farklı biçimde yazınız.

a) $a \cdot a$ **b)** $5x \cdot 8x$ **c)** $-4 \cdot 5b$

2. Örnek

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri farklı biçimlerde yazalım.

a) $12x^2$ **b)** $35x$ **c)** $25ab$

Çözüm

Verilen ifadelerin çarpanlarını bulalım.

a) $12x^2 = 4x \cdot 3x$

$= 6x \cdot 2x$

$= 12x \cdot x$ şeklinde yazabiliriz.

b) $35x = 7x \cdot 5$

$= 7 \cdot 5x$ şeklinde yazabiliriz.

c) $25ab = 5a \cdot 5b$

$= 25a \cdot b$

$= 25b \cdot a$ şeklinde yazabiliriz.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri farklı biçimlerde yazınız.

a) $30a^2$ **b)** $14xy$ **c)** $27b$

Etkinlik

$124x^2$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

- 124 sayısının çarpanlarını yazınız.

.... • ....

.... • ....

.... • ....

- Bu listeden yararlanarak $124x^2$ ifadesini kaç farklı şekilde çarpanlara ayırabileceğinizi bulunuz.

✓ Basit bir cebirsel ifade farklı biçimlerde nasıl yazılır? Arkadaşlarınızla tartışınız.

Bilgi Kutusu

2 • (3x –5) ifadesi ile 2(3x –5) ifadesi eşittir.

2 • (3x – 5) = 2(3x – 5)

3. Örnek

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri farklı biçimlerde yazalım.

a) 3(2x + 5) **b)** –4(x – 7) **c)** (3 – 5x)6

Çözüm

Çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinden yararlanalım.

a) 3(2x + 5) = 6x + 15

b) –4(x – 7) = –4x + 28

c) (3 – 5x)6 = 18 – 30x

Sıra Sizde

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri çarpınız.

a) –9(x + 1) **b)** 4(6 – 2x) **c)** (3 – x)5

ç) 4(2x – 3) **d)** –3(x + 6) **e)** –2(2x – 3)

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki cebirsel ifadelerin terim, katsayı, değişken ve sabit terimlerini belirleyiniz.

a) $3a - 14$ **b)** $y^2 - 4y$ **c)** $3x^2 + 7x + 1$ **ç)** $2c + 3$

2. Aşağıdaki cebirsel ifadelerden eşit olanları eşleştiriniz.

I. $4x \cdot 3$ (......) x^2y^2

II. $-9a \cdot 3a$ (......) $8a^2$

III. $x \cdot x \cdot y \cdot y$ (......) $12x$

IV. $5x \cdot (-3x)$ (......) $-15x^2$

V. $a \cdot 8a$ (......) $-27a^2$

3. Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri farklı biçimde boş bırakılan yerlere yazınız.

$15c^2 =$ .... $28ab =$ ....

$63xy^2 =$ .... $29a^2b =$ ....

$36x^2y^2 =$ .... $48ad =$ ....

4. Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri farklı biçimde yazınız.

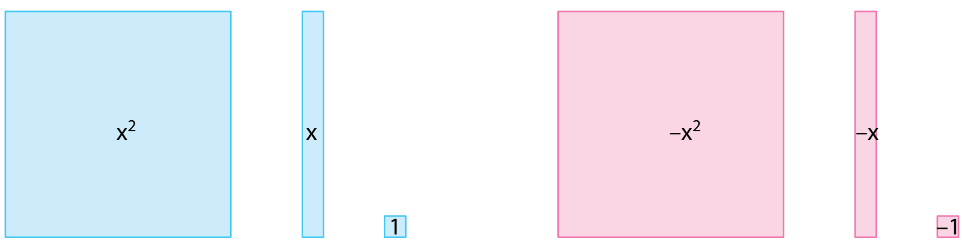
a) $-5(x + 2)$ **b)** $6(x^2 - y)$

c) $3(2a^2 + 5)$ **ç)** $(x - y)9$

d) $(6 - 3a)7$ **e)** $2(4x - 5y)$

3.2.2. Cebirsel İfadelerde Çarpma İşlemi

Cebirsel ifadelerde çarpma işlemini modellerken cebir karolarını kullanacağız.



Mavi karolar pozitif ifadeleri, pembe karolar negatif ifadeleri göstermektedir.

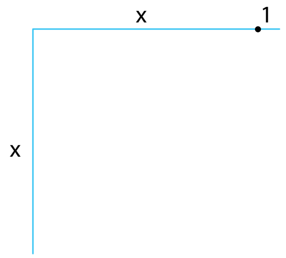
Cebir karolarında aynı büyüklükteki 1 mavi ve 1 pembe karonun toplamı "0" olur.

1. Örnek

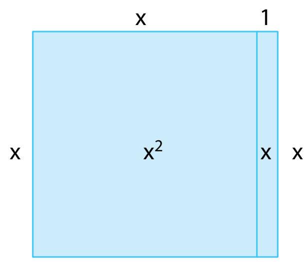
$x(x + 1)$ çarpma işlemini modelleyelim.

Çözüm

Uzunluğu x birim ve $x + 1$ birim olan iki doğru parçası çizelim.



Bu şekli tamamlayalım.



Görüldüğü gibi x^2 ve x olmak üzere iki alan oluşmuştur. O hâlde $x(x + 1) = x^2 + x$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki çarpma işlemlerini modelleyiniz.

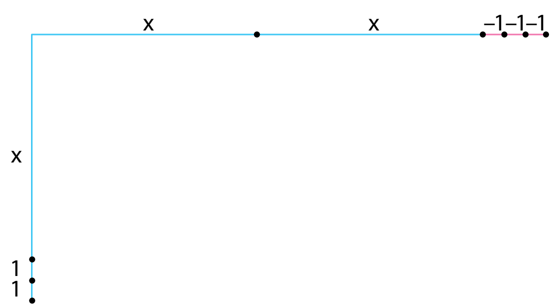
a) $x(x - 3)$ **b)** $x(x + 2)$ **c)** $x(x + 3)$

2. Örnek

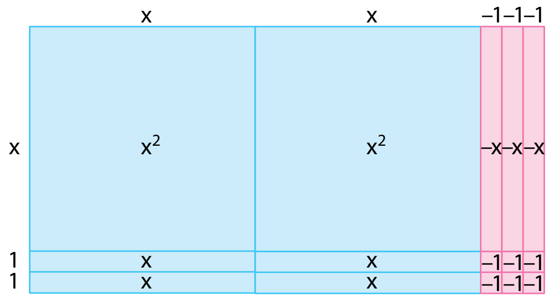
$(x + 2) \cdot (2x - 3)$ işlemini modelleyerek sonucunu bulalım.

Çözüm

Uzunluğu $x + 2$ ve $2x - 3$ olan iki doğru parçası çizelim.



Şimdi bu şekli tamamlayalım.



Görüldüğü gibi 2 tane x^2, 4 tane x, 3 tane –x, 6 tane –1 alanı oluşmuştur.

O hâlde $(x + 2) \cdot (2x - 3) = 2x^2 + 4x - 3x - 6$

$= 2x^2 + x - 6$ bulunur.

Sıra Sizde

$(x + 3) \cdot (2x - 1)$ işlemini modelleyerek sonucunu bulunuz.

Aşağıdaki tabloda verilen çarpma işlemlerini inceleyiniz. Yapılan çarpma işlemlerinde çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinden yararlanılmıştır. Daha önce yaptığınız çarpma işlemleri ile tabloda verilen çarpma işlemleri arasındaki benzerlikleri arkadaşlarınızla tartışınız.

Çarpma İşlemi	Sonuç
$3a \cdot (a + 1)$	$3a^2 + 3a$
$2x \cdot (3x - 5)$	$6x^2 - 10x$
$5a \cdot (2a - 3b + 1)$	$10a^2 - 15ab + 5a$
$-4c \cdot (x - 3y + 6)$	$-4cx + 12cy - 24c$

Etkinlik

Aşağıdaki tabloyu uygun şekilde tamamlayınız.

Çarpım	Sonuç	Çarpım	Sonuç
$x \cdot (-3x + 5)$		$(x - 1) \cdot (x + 3)$	
$-5x \cdot (2x - 3)$		$(3x + 4) \cdot (x + 7)$	

3. Örnek

Aşağıda verilen çarpma işlemlerini yapalım.

a) $2x(3x - 5)$ **b)** $-5a(1 + 4a)$ **c)** $6x(2x + 7)$

Çözüm

Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğini kullanalım.

a) $2x(3x - 5) = 2x \cdot 3x - 2x \cdot 5 = 6x^2 - 10x$

b) $-5a(1 + 4a) = -5a \cdot 1 + (-5a) \cdot 4a = -5a + (-20a^2) = -5a - 20a^2$

c) $6x(2x + 7) = 6x \cdot 2x + 6x \cdot 7 = 12x^2 + 42x$

Sıra Sizde

Aşağıda verilen çarpma işlemlerini yapınız.

a) $2c(4c - 9)$ b) $3a(2 - 6a)$ c) $-3x(8x + 1)$

4. Örnek

Aşağıda verilen çarpma işlemlerini yapalım.

a) $(x + 5) \cdot (2x - 3)$ b) $(3a + 2) \cdot (4 - a)$ c) $(3y + 1) \cdot (2y + 6)$

Çözüm

Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğini kullanalım.

a) $(x + 5) \cdot (2x - 3) = x \cdot 2x + x \cdot (-3) + 5 \cdot 2x + 5 \cdot (-3)$

$= 2x^2 - 3x + 10x - 15$ (Tabanı ve üssü aynı olan cebirsel ifadeleri toplayalım.)

$= 2x^2 + 7x - 15$

b) $(3a + 2) \cdot (4 - a) = 3a \cdot 4 + 3a \cdot (-a) + 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-a)$

$= 12a - 3a^2 + 8 - 2a$ (Tabanı ve üssü aynı olan cebirsel ifadeleri toplayalım.)

$= -3a^2 + 10a + 8$

c) $(3y + 1) \cdot (2y + 6) = 3y \cdot 2y + 3y \cdot 6 + 1 \cdot 2y + 1 \cdot 6$

$= 6y^2 + 18y + 2y + 6$ (Tabanı ve üssü aynı olan cebirsel ifadeleri toplayalım.)

$= 6y^2 + 20y + 6$

Sıra Sizde

Aşağıdaki cebirsel ifadelerin çarpımını yapınız.

a) $(1 - x) \cdot (2 + 3x)$ b) $(3a - 5) \cdot (5 + a)$ c) $(y - 7) \cdot (5y - 9)$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen çarpma işlemlerini modelleyiniz.

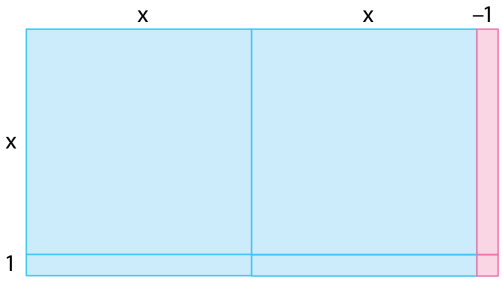
   a) $2x(x-3)$ b) $(x+1) \cdot (3x-5)$ c) $-x(5+2x)$

2. Aşağıdaki çarpma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

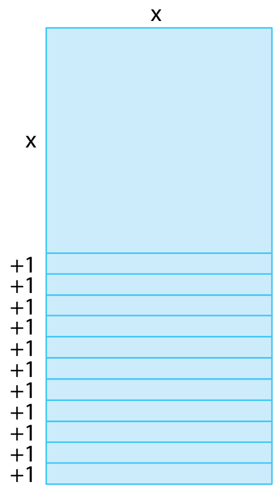
   a) $(6-x) \cdot 5x$ b) $9x \cdot (2x-3)$ c) $(5x+1) \cdot (1-x)$ ç) $(3-2x) \cdot (x+6)$

3. Aşağıda modellenen çarpma işlemlerinin cebirsel ifadesini ve sonucunu yazınız.

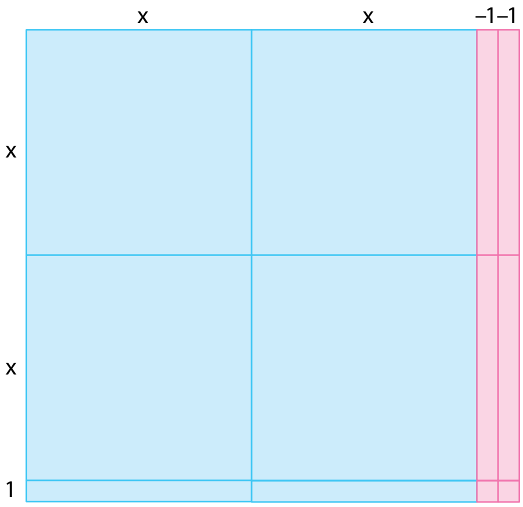
a)



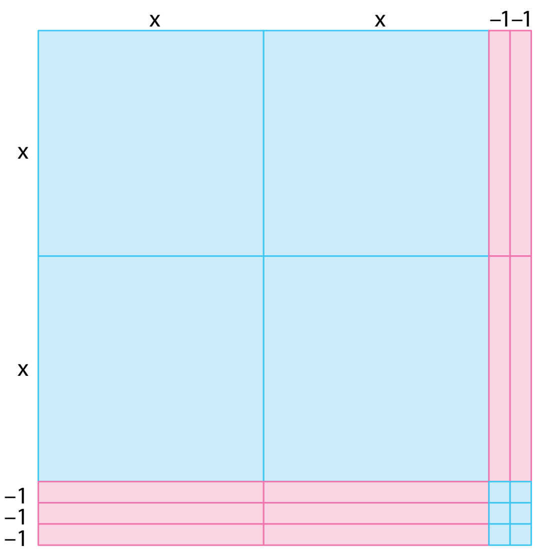
b)



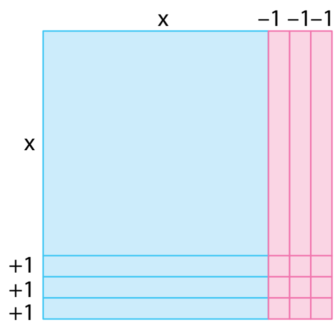
c)



ç)



d)



3.2.3. Özdeşlikler

$(x + 1) \cdot (x - 2)$ çarpma işlemini yapalım.

$(x + 1) \cdot (x - 2) = x \cdot x - x \cdot 2 + 1 \cdot x - 1 \cdot 2$

$(x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 - 2x + x - 2$

$(x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 - x - 2$ bulunur.

Bilgi Kutusu

*Bilinmeyenin her değeri için doğru olan cebirsel ifadelere **özdeşlik** denir.*

x yerine –2, 0, 1, 2 değerlerini yazarak sol taraftaki ifadenin sağ taraftaki ifadeye eşit olup olmadığını kontrol edelim.

$(x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 - x - 2$

$x = -2$ için $(-2 + 1) \cdot (-2 - 2) = (-2)^2 - (-2) - 2$

$(-1) \cdot (-4) = 4 + 2 - 2$

$4 = 4$ ($x = -2$ için eşitlik sağlandı.)

$x = 0$ için $(0 + 1) \cdot (0 - 2) = 0^2 - 0 - 2$

$1 \cdot (-2) = -2$

$-2 = -2$ ($x = 0$ için eşitlik sağlandı.)

$x = 1$ için $(1 + 1) \cdot (1 - 2) = 1^2 - 1 - 2$

$2 \cdot (-1) = 1 - 1 - 2$

$-2 = -2$ ($x = 1$ için eşitlik sağlandı.)

$x = 2$ için $(2 + 1) \cdot (2 - 2) = 2^2 - 2 - 2$

$3 \cdot 0 = 4 - 4$

$0 = 0$ ($x = 2$ için eşitlik sağlandı.)

Siz de belirlediğiniz x değerleri için eşitliğin sağlanıp sağlanamadığını kontrol ediniz.

O hâlde $(x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 - x - 2$ cebirsel ifadesinde x yerine hangi değeri yazarsak yazalım eşitlik her zaman sağlanır.

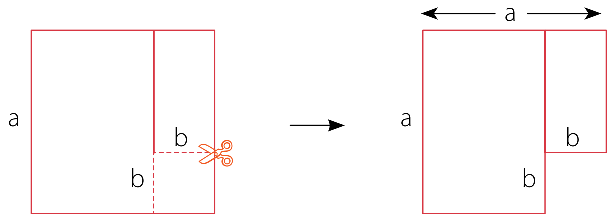
1. Örnek

$(a + b) \cdot (a - b)$ çarpma işlemini modelleyelim.

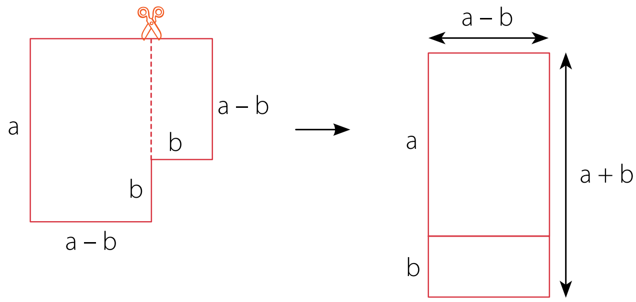
Çözüm

Kenar uzunluğu a br olan bir kare alalım:

Karenin bir köşesinden kenar uzunluğu b birim olan başka bir kare kesip çıkaralım. Kalan kısmın alanı $a^2 - b^2$ olur.



Kenar uzunluğu b olan kareyi çıkardıktan sonra bu karenin üst tarafından kalan kısmı da keselim. Kestiğimiz kısmı, kenar uzunlukları a ve a – b olan dikdörtgenin ucuna ekleyelim.



Yeni oluşan dikdörtgenin alanı $(a - b) \cdot (a + b)$ olur. O hâlde;
$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$'dir.

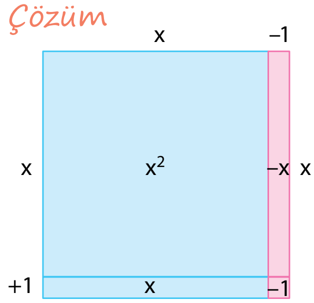
Bilgi Kutusu

*$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ özdeşliğine, **iki kare farkı özdeşliği** denir.*

2. Örnek

Cebir karolarını kullanarak $(x - 1) \cdot (x + 1)$ çarpma işlemini modelleyelim.

Çözüm



$(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 + x - x - 1 = x^2 - 1$
bulunur.

3. Örnek

Aşağıda verilen cebirsel ifadelerin özdeşi olan ifadeleri yazalım.

a) $9x^2 - y^2$ **b)** $a^2 - 16$ **c)** $1 - x^2$ **ç)** $a^2b^2 - 81$

Çözüm

İki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak ifadelerin özdeşlerini yazalım.

a) $\underbrace{9x^2}_{(3x)^2} - \underbrace{y^2}_{y^2} = (3x - y) \cdot (3x + y)$

b) $\underbrace{a^2}_{a^2} - \underbrace{16}_{4^2} = (a - 4) \cdot (a + 4)$

c) $\underbrace{1}_{1^2} - \underbrace{x^2}_{x^2} = (1 - x) \cdot (1 + x)$

ç) $\underbrace{a^2b^2}_{(ab)^2} - \underbrace{81}_{9^2} = (ab - 9) \cdot (ab + 9)$

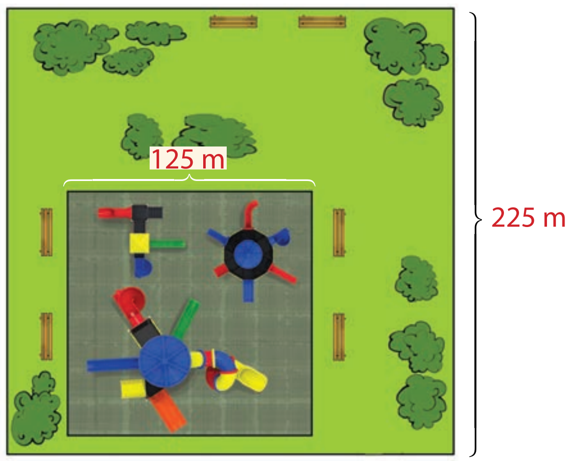
Sıra Sizde

Aşağıda verilen cebirsel ifadelerin özdeşi olan ifadeleri yazınız.

a) $4x^2 - 36$ **b)** $49a^2 - 100y^2$ **c)** $y^2 - 64$ **ç)** $x^2y^2 - 9$

1. Problem

Kare şeklindeki bir parkın içine yine kare şeklinde bir oyun parkı yapılmıştır. Parkın bir kenar uzunluğu 225 m, oyun parkının bir kenar uzunluğu ise 125 m'dir. Oyun parkı dışında kalan bölgenin alanını hesaplayalım.



Çözüm

1. Problemi Anlayalım

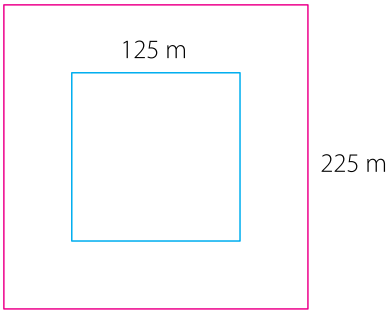
- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve isteneni belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Parkın bir kenar uzunluğu: 225 m Oyun parkının bir kenar uzunluğu: 125 m	Geri kalan yeşil bölgenin alanı: ?

- Problemi özet olarak yazalım.

Parkın bir kenar uzunluğu	Parkın alanı	Oyun parkının bir kenar uzunluğu	Oyun parkının alanı	Kalan yeşil bölgenin alanı
225 m	?	125 m	?	?

- Problemin şemasını çizelim.



2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  Parkın ve oyun parkının alanını bulmak için çarpma işlemi kullanırız. Park ve oyun parkı arasında kalan yeşil bölgenin alanını bulmak için parkın alanından oyun parkının alanını çıkarırız.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

  Parkın alanı: 225^2 m^2

  Oyun parkının alanı: 125^2 m^2

  Yeşil bölgenin alanı: $225^2 - 125^2$ m^2

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

  Yeşil alan: $225^2 - 125^2 = (225 - 125) \cdot (225 + 125)$ (İki kare farkı özdeşliğinden yararlandık.)

  $= 100 \cdot 350$

  $= 35\,000$ m^2

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

  İşlemi bir de sayıların karelerini alarak yapalım. Bunun için hesap makinesinden yararlanabiliriz.

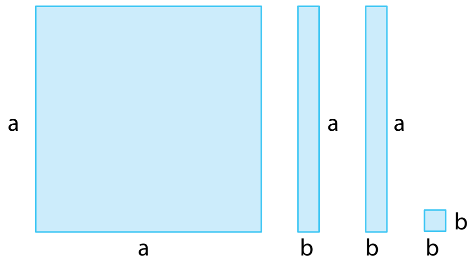
  $225^2 - 125^2 = 50\,625 - 15\,625 = 35\,000$ m^2

  Bulunan sonuç doğrudur.

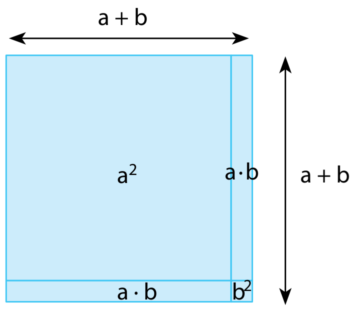
4. Örnek

(a + b) · (a + b) çarpma işlemini modelleyelim.

Çözüm



Kenar uzunluğu a olan bir kare, kenar uzunlukları a ve b olan iki dikdörtgen, kenar uzunluğu b olan bir kare alalım. Bu dörtgenleri birleştirelim.



$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$

$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ bulunur.

Bilgi Kutusu

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$

$= a^2 + 2ab + b^2$

*özdeşliğine **iki terim toplamının karesi özdeşliği,***

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$

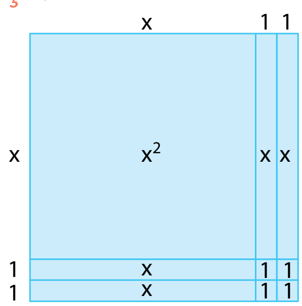
$= a^2 - 2a\,b + b^2$

*özdeşliğine ise **iki terim farkının karesi özdeşliği** denir.*

5. Örnek

Cebir karolarıyla $(x + 2)^2 = (x + 2) \cdot (x + 2)$ çarpma işlemini modelleyelim.

Çözüm



$(x + 2)^2 = (x + 2) \cdot (x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$ olur.

6. Örnek

Aşağıda verilen cebirsel ifadelerin özdeşi olan ifadeleri yazalım.

a) $(x + 2y)^2$ **b)** $(3 - a)^2$ **c)** $(b + 5)^2$ **ç)** $(xy - 2)^2$

Çözüm

İki terim toplamının ve farkının karesi özdeşliklerinden yararlanalım.

a) $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

b) $(3 - a)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot a + a^2 = 9 - 6a + a^2$

c) $(b + 5)^2 = b^2 + 2 \cdot 5 \cdot b + 5^2 = b^2 + 10b + 25$

ç) $(xy - 2)^2 = (xy)^2 - 2 \cdot 2 \cdot xy + 2^2 = x^2y^2 - 4xy + 4$

Sıra Sizde

Aşağıda verilen cebirsel ifadelerin özdeşi olan ifadeleri yazınız.

a) $(x + 1)^2$ **b)** $(3x - 5)^2$ **c)** $(7 + a)^2$ **ç)** $(2 - 3xy)^2$

7. Örnek

$a + b = 8$, $a^2 + b^2 = 14$ olarak veriliyor. "ab" değerini bulalım.

Çözüm

İki terim toplamının karesi özdeşliğinden yararlanalım.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$8^2 = 14 + 2ab$

$64 = 14 + 2ab$

$64 - 14 = 2ab$

$50 = 2ab$ ise $ab = 25$ bulunur.

8. Örnek

Çarpımları 18 olan iki doğal sayının karelerinin toplamı 85'tir. Bu sayıların toplamı kaçtır?

Çözüm

Yukarıdaki soruyu özdeşliklerden yararlanarak çözelim. Sayılardan biri a, diğeri b olsun. Bu durumda;

$ab = 18$ ve $a^2 + b^2 = 85$ olur.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliğinden yararlanalım.

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a + b)^2 = 85 + 2 \cdot 18$

$(a + b)^2 = 85 + 36$

$(a + b)^2 = 121$ ise $a + b = 11$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki soruları özdeşliklerden yararlanarak yanıtlayınız.

a) Toplamları 9, karelerinin toplamları 41 olan iki doğal sayının çarpımı kaçtır?

b) $a - b = 7$, $a^2 + b^2 = 109$ ise "ab" kaçtır?

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen eşitliklerden özdeşlik olanların başındaki kutucuğa "x" işaretini koyunuz.

- [ ] $3x(2x - 9) = 6x^2 - 27x$
- [ ] $(x + 5) \cdot (x - 7) = x^2 - x - 35$
- [ ] $-2a(a + 3x) = -2ax + 2a^2$
- [ ] $(2a - b) \cdot (2a + b) = 4a^2 - b^2$
- [ ] $(2x + 3) \cdot (3x - 7) = 6x^2 - 5x - 21$

2. Aşağıda verilen ifadeleri, özdeş olduğu ifadelerle eşleştiriniz.

I. $(x + 5y)^2$	(......) $16 - 72x + 81x^2$
II. $(2x - 3y)^2$	(......) $x^2 + 10xy + 25y^2$
III. $(3x + 8)^2$	(......) $49 - 84xy + 36x^2y^2$
IV. $(4 - 9x)^2$	(......) $64 + 48x + 9x^2$
V. $(7 - 6xy)^2$	(......) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

3. Aşağıda verilen ifadelere özdeş olan ifadeleri yazınız.

a) $(2z - 3y) \cdot (2z + 3y) =$ ....

b) $16 - x^2 =$ ....

c) $25x^2 - 36 =$ ....

ç) $9a^2b^2 - c^2 =$ ....

d) $1 - 4y^2 =$ ....

4. Kenar uzunlukları 5a ve 2a olan bir dikdörtgenin kenar uzunlukları ikişer birim artırılıyor. Yeni oluşan dikdörtgenin alanı kaç br^2 olur?

5. $x^2 - Y = (x - 13) \cdot (x + 13)$ ifadesinin bir özdeşlik olması için "Y" yerine hangi sayı gelmelidir?

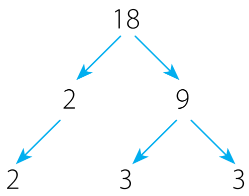
6. $100^2 - 98^2 = 2 \cdot M$ ise, M yerine hangi sayı gelmelidir?

7. Çarpımları 15, karelerinin toplamı 34 olan iki doğal sayıdan, büyük olan küçük olandan kaç fazladır?

A) 12   B) 9   C) 4   D) 2

3.2.4 Çarpanlara Ayırma

18 sayısının çarpanlarını çarpan ağacı yöntemiyle bulalım.



$18 = 18 \cdot 1$

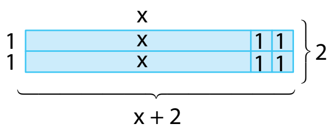
$18 = 2 \cdot 9$

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ ya da $18 = 6 \cdot 3$

18'in çarpanları 1, 2, 3, 6, 9 ve 18'dir.

Sayılarla yaptığımız çarpanlara ayırma işlemini cebirsel ifadelerle de yapalım.

$2x + 4$ ifadesini cebir karolarını kullanarak modelleyelim.



O hâlde $2 \cdot (x + 2) = 2x + 4$ bulunur.

Aynı işlemi terimlerin çarpanlarını yazarak yapalım. $2x + 4 = 2 \cdot x + 2 \cdot 2$
Her ikisinde de "2" çarpanı ortaktır. O hâlde ifadeyi 2 parantezine alalım.

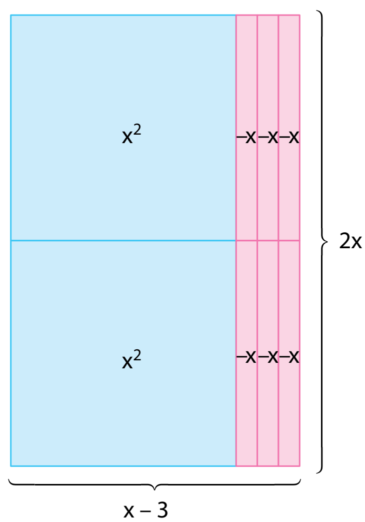
$2x + 4 = 2(x + 2)$ olur.

Bilgi Kutusu

Bir cebirsel ifadeyi çarpanlarının çarpımı şeklinde yazmaya o cebirsel ifadeyi ***çarpanlarına ayırma*** *denir.*

Etkinlik

- Yanda cebir karolarıyla oluşturulmuş şekli inceleyiniz.
- Şeklin alanını cebir karolarının toplamı olarak yazınız.
- Dikdörtgensel bölgenin alanını kenar uzunluklarının çarpımı olarak yazınız.
- Cebir karolarının toplamı olarak yazdığınız ifade ile kenar uzunluklarının çarpımı olarak yazdığınız ifade arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak yazınız.
  - ✓ Oluşturduğunuz eşitliğin hangi tarafı, iki cebirsel ifadenin çarpımı şeklindedir?
  - ✓ Bu çarpanlar hangi cebirsel ifadelerdir?

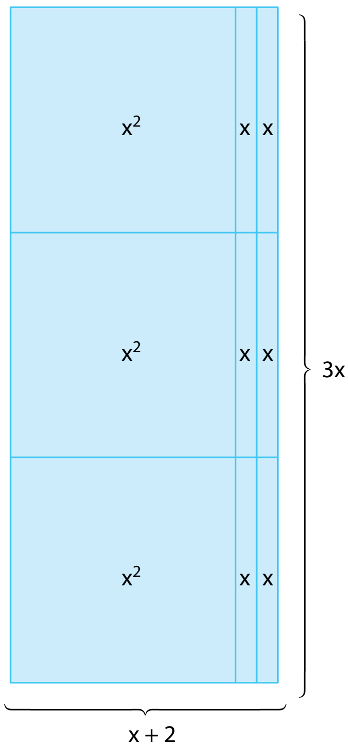


1. Örnek

$3x^2 + 6x$ ifadesini hem cebir karolarını kullanarak hem de çarpanlarını bularak çarpanlarına ayıralım.

Çözüm

Cebir karolarını kullanalım.



O hâlde $3x^2 + 6x = 3x \cdot (x + 2)$ bulunur. $3x^2 + 6x$ ifadesindeki terimlerin çarpanlarını yazalım.

$3x^2 + 6x = 3x \cdot x + 3x \cdot 2$ (3x, her iki terimde de ortaktır.)

$= 3x(x + 2)$ olur.

Bilgi Kutusu

*Cebirsel ifadenin her terimindeki ortak çarpanları, parantezin dışına alarak yazmaya **ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırma** denir.*

2. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayıralım.

a) $3x - 9$ **b)** $2x^2 + 4x$ **c)** $x^3 - x^2$ **ç)** $3xy - 6xy^2$

Çözüm

İfadedeki terimleri, ortak çarpanlarını bularak çarpanlarına ayıralım.

a) $3x - 9 = 3 \cdot x - 3 \cdot 3 = 3(x - 3)$

b) $2x^2 + 4x = 2x \cdot x + 2x \cdot 2 = 2x(x + 2)$

c) $x^3 - x^2 = x^2 \cdot x - x^2 \cdot 1 = x^2(x - 1)$

ç) $3xy - 6xy^2 = 3xy \cdot 1 - 3xy \cdot 2y = 3xy(1 - 2y)$

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırınız.

a) $3x^2 - x$ b) $10x^3 + 5x^2$ c) $x^4 - x^3$ ç) $3x + 12x^2$

3. Örnek

$3x - 6 + 12z$ ifadesini ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayıralım.

Çözüm

$$3x - 6 + 12z = 3x - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4z$$
$$= 3(x - 2 + 4z)$$

Sıra Sizde

Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırınız.

a) $8x^2 + 6x + 4$ b) $3x + 9x^2 - 12$

4. Örnek

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $9 - a^2$ b) $16x^2 - 1$ c) $x^2y^2 - 81$ ç) $100^2 - 98^2$

Çözüm

Cebirsel ifadeleri, iki kare farkı özdeşliğini kullanarak çarpanlarına ayıralım.

a) $9 - a^2 = (3 - a) \cdot (3 + a)$

b) $16x^2 - 1 = (4x - 1) \cdot (4x + 1)$

c) $x^2y^2 - 81 = (xy + 9) \cdot (xy - 9)$

ç) $100^2 - 98^2 = (100 + 98) \cdot (100 - 98)$

Bilgi Kutusu

İki kare farkı özdeşliğini, çarpanlara ayırma yöntemi olarak kullanabiliriz.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $4 - 9a^2$ b) $9x^2y^2 - 100$ c) $25x^2 - 16$ ç) $1000^2 - 998^2$

5. Örnek

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayıralım.

a) $a^2 - 6a + 9$ **b)** $x^2 + 18x + 81$

c) $4x^2 - 4x + 1$ **ç)** $a^2b^2 + 10ab + 25$

Çözüm

Cebirsel ifadeleri iki terim toplamının karesi ve iki terim farkının karesi özdeşliklerini kullanarak çarpanlarına ayıralım. Ortadaki terimin işareti "–" ise iki terimin farkının karesi özdeşliğinden; "+" ise iki terimin toplamının karesi özdeşliğinden yararlanalım.

Bilgi Kutusu

İki terimin toplamının ya da farkının karesi özdeşliğini, çarpanlara ayırma yöntemi olarak kullanabiliriz.

a) $a^2 - 6a + 9$ (İki terimin farkının karesi)

$\downarrow$ a^2 $\downarrow$ 3^2

1. terimdeki a^2; a'nın karesidir.

3. terimdeki 9; 3'ün karesidir.

a ve 3'ün çarpımının 2 katı, ortadaki terimi vermelidir. ($a \cdot 3 \cdot 2 = 6a$)
Ayrıca 6a'nın işareti negatif olduğundan a ile 3 arasında "–" işareti olmalıdır.

O hâlde $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2 = (a - 3) \cdot (a - 3)$'tür.

b) $x^2 + 18x + 81$ (İki terimin toplamının karesi)

$\downarrow$ x^2 $\downarrow$ 9^2

1. terimdeki x^2; x'in karesidir.

3. terimdeki 81; 9'un karesidir.

x ve 9'un çarpımının 2 katı, ortadaki terimi vermelidir. ($x \cdot 9 \cdot 2 = 18x$)

O hâlde $x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2 = (x + 9) \cdot (x + 9)$'dur.

c) $4x^2 - 4x + 1$ (İki terim farkının karesi)

$\downarrow$ $(2x)^2$ $\downarrow$ 1^2

1. terimdeki $4x^2$; 2x'in karesidir.

3. terimdeki 1; 1'in karesidir.

2x ve 1'in çarpımının 2 katı, ortadaki terimi vermelidir. ($2x \cdot 1 \cdot 2 = 4x$)
Ayrıca 4x'in işareti negatif olduğundan 2x ile 1 arasına "–" işareti olmalıdır.

O hâlde $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = (2x - 1) \cdot (2x - 1)$'dir.

ç) $a^2b^2 + 10ab + 25$ (İki terim toplamının karesi)

$$\underset{(ab)^2}{\underbrace{a^2b^2}} + 10ab + \underset{5^2}{\underbrace{25}}$$

1. terimdeki a^2b^2; ab'nin karesidir.

3. terimdeki 25; 5'in karesidir.

ab ve 5'in çarpımının 2 katı, ortadaki terimi vermelidir. ($ab \cdot 5 \cdot 2 = 10ab$)

O hâlde $a^2b^2 + 10ab + 25 = (ab + 5)^2 = (ab + 5) \cdot (ab + 5)$'tir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2 + 8x + 16$ **b)** $9a^2 + 30a + 25$ **c)** $x^2 - 14x + 49$ **ç)** $x^2 - 16x + 64$

6. Örnek

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.

a) $76^2 - 70^2$ **b)** $1050^2 - 1049^2$

Çözüm

İki kare farkından yararlanarak çarpanlara ayırmak, işlemlerin sonuçlarını bulmayı kolaylaştırır.

a) $76^2 - 70^2 = (76 + 70) \cdot (76 - 70)$

$= 146 \cdot 6$

$= 876$ bulunur.

b) $1050^2 - 1049^2 = (1050 + 1049) \cdot (1050 - 1049)$

$= 2099 \cdot 1$

$= 2099$

Sıra Sizde

Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $48^2 - 45^2$ **b)** $39^2 - 35^2$ **c)** $100^2 - 81^2$

7. Örnek

Aşağıda çarpanlarına ayrılmış cebirsel ifadelerde $\square$ yerine gelmesi gereken terimleri bulalım.

a) $(3x - \square)^2 = 9x^2 - 12x + 4$

b) $(\square + a)^2 = 16 + 8a + a^2$

c) $(5x - 2y)^2 = 25x^2 - \square + 4y^2$

Çözüm

Eşitliklerde terimlerin eksik olmayan taraflarını çarpanlarına ayıralım.

a) $\underset{(3x)^2}{\underset{\downarrow}{9x^2}} - 12x + \underset{2^2}{\underset{\downarrow}{4}} = (3x - 2)^2$ ise $\square$ yerine 2 gelmelidir.

b) $\underset{4^2}{\underset{\downarrow}{16}} + 8a + \underset{a^2}{\underset{\downarrow}{a^2}} = (4 + a)^2$ ise $\square$ yerine 4 gelmelidir.

c) $(5x - 2y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2y + (-2y)^2 = 25x^2 - 20xy + 4y^2$ ise $\square$ yerine 20xy gelmelidir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki eşitliklerde boş bırakılan yerlere gelmesi gereken terimleri bulunuz.

a) $(2x - \ldots\ldots)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

b) $(\ldots\ldots + 3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2$

c) $(4x + 2z)^2 = 16x^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots$

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki cebirsel ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırınız.

a) $3x + 12$	**b)** $2x + 8x^2$	**c)** $xy^2 - 5xy$
ç) $x^2y - 6xy - xy^2$	**d)** $2x + 6y$	**e)** $x^3 + x^2 + x$

2. Aşağıdaki cebirsel ifadeleri, iki kare farkı özdeşliğinden yararlanarak çarpanlarına ayırınız.

a) $9 - a^2$	**b)** $121 - a^2$	**c)** $101^2 - 98^2$
ç) $4a^2 - 100$	**d)** $y^2z^2 - 36$	**e)** $81 - 144a^2$

3. Aşağıdaki cebirsel ifadeleri, tam kare özdeşliklerden yararlanarak çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2 - 2x + 1$ b) $9a^2 + 6a + 1$ c) $36 - 12x + x^2$

ç) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ d) $64 - 48a + 9a^2$ e) $100 + 20x + x^2$

4. $16x^2 + Mx + 25$ ifadesinin iki terim toplamının karesi olması için M ne olmalıdır?

5. $x + y = 9$, $x^2 + y^2 = 25$ ise xy kaçtır?

6. Aşağıdaki ifadelerin eşiti olan ifadeleri yazınız.

$(a - 7) \cdot (a + 7) =$..

$(2a - 1) \cdot (2a - 1) =$..

$(5 - 4x) \cdot (5 + 4x) =$..

$(3 + 7a) \cdot (3 + 7a) =$..

$(1 - 9x) \cdot (1 + 9x) =$..

$(6a - 8) \cdot (6a + 8) =$..

$(x + 1) \cdot (x + 1) =$..

$5x \cdot (3x - 7) =$..

$-3a \cdot (5a - 9) =$..

7. $108x^2$ teriminin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisi <u>değildir</u>?

A) x B) 2 C) $54x^2$ D) 5x

8. Aşağıdaki cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $4x - 6$ b) $7x^2 + 3x$ c) $15a^2 - 5a + 5$

ç) $8x^3 + 4x^2 + 2x$ d) $5xy^2 + 8xy$ e) $12x^2a + 6xa$

9. Aşağıdaki eşitliklerde boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

a) $x^2 - 9 = (x -$ ....$) \cdot (x + 3)$ b) $36x^2 -$ .... $=$ (....... $+ 5) \cdot (6x - 5)$

c) .... $-$ .... $= (2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$ ç) $16a^2 - 9b^2 =$ (....... + ...) $\cdot$ (....... − ....)

10. $36x^2y^2 - 12xyz + z^2$ cebirsel ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $12xz + 2y$ B) $6xy - z$ C) $12xy - 3z$ D) $6xyz$

11. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2 - 8xy + 16y^2$ b) $a^2 + 2ab + b^2$

c) $9x^2y^2 + 12xy + 4$ ç) $4m^2 - 20mn + 25n^2$

3. Ünite Değerlendirme

1. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

   a) İki madenî para havaya atıldığında olası tüm çıktıların sayısı .... 'tür.

   b) Bir zar atıldığında herhangi bir yüzünün üste gelme olasılığı .... 'dır.

   c) Olasılık değerleri, ... ile .... arasındadır.

   ç) Olasılık değeri 1 olan olaya .... denir.

   d) İnsanların susuz yaşaması .... bir olaydır.

2.

Elma	Patlıcan	Erik	Muz
Kabak	Karpuz	Çilek	Ispanak
Patates	Kiraz	Fasulye	Portakal

Bir torbaya yukarıdaki kartlar konuyor. Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Torbada kaç tane kart vardır?

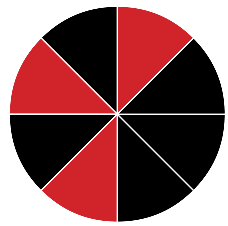
b) Torbadan bir kart çekildiğinde kartın üzerinde meyve adı yazması ile ilgili olayı ve bu olayın çıktılarını yazınız.

c) Torbadan bir kart çekildiğinde kartın üzerinde sebze adı yazması ile ilgili olayı ve bu olayın çıktılarını yazınız.

ç) Torbadan bir kart çekildiğinde kartın üzerinde meyve adı yazma olasılığı kaçtır?

3. Bir müzik korosunda 58 kişiden 13'ü erkektir. Bu korodan rastgele seçilen bir kişinin kız olma olasılığı ile erkek olma olasılığını karşılaştırınız. Hangi olasılık daha büyüktür?

4. Yandaki çark, 8 eşit parçaya bölünmüştür. Bu çark döndürüldüğünde;



   a) Kırmızı bölmede durma olasılığı kaçtır?

   b) Siyah bölmede durma olasılığı kaçtır?

5. Aşağıda verilen ifadelerle olayları eşleştiriniz.

İmkânsız olay

Kesin olay

I. Yağmur yağarken dışarıda dolaşan bir insanın ıslanması

II. Bir zar atıldığında üste gelen yüzünde 7 nokta olması

III. İçinde sakız bulunan bir torbadan çikolata çekilmesi

IV. 100°de kaynayan suyun buharlaşması

6. İki zar aynı anda atılıyor. Zarlardan birinin üste gelen yüzündeki nokta sayısının, diğerininkinden 2 fazla olması olasılığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{12}$

7. 1'den 20'ye kadar olan sayılardan rastgele seçilen bir sayının 3'e tam bölünme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{9}{20}$

8. "BURSA" kelimesinin harflerinin her biri eş özellikteki kartlara yazılarak kartlar bir torbaya atılıyor. Torbadan rastgele çekilen bir kartta "U" harfinin yazılı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

9. Aşağıdaki gerçek sayılardan kaç tanesi bir olasılık değeri belirtebilir?

• 0,5 • %40 • $\frac{3}{5}$ • 5 • $\frac{-1}{5}$ • π • 0,005

A) 6 B) 5 C) 4 D) 2

10. Bir torbada eş özellikte 8 tane kırmızı, 6 tane siyah top vardır. Torbadan rastgele bir top çekildiğinde topun siyah olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{11}{14}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{1}{7}$

11. Bir madenî para arka arkaya iki kez havaya atılıyor. Bir kez yazı gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) 1 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{2}$

12. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

Cebirsel İfade	Terimler	Katsayılar	Değişken
$2x - 8$			
$6x^2 - 7x - 4$			
$2 - 5a - 12a^3$			
$4b - b^3 + b^5$			

13. $6x^3 - 7x^2 + 4x - 1$

Bu cebirsel ifade için aşağıda verilenlerden hangisi yanlıştır?

A) 4 terim vardır.

B) Katsayıların toplamı 2'dir.

C) x^2li terimin katsayısı 7'dir.

D) Sabit terim –1'dir.

14. $48d^2b^3$ ifadesi aşağıdaki çarpımlardan hangisine eşittir?

A) $(12d) \cdot (4b^2)$ B) $(16db^2) \cdot (3db)$

C) $48(d^2b^2)$ D) $(2d^2b^3) \cdot (24d^2b^3)$

15. Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız.

a) $2x(x - 12) =$ ....

b) $-3a(5 - a^2) =$ ....

c) $4m^2(m + m^2) =$ ....

ç) $t(t^2 - 2t + 3) =$ ....

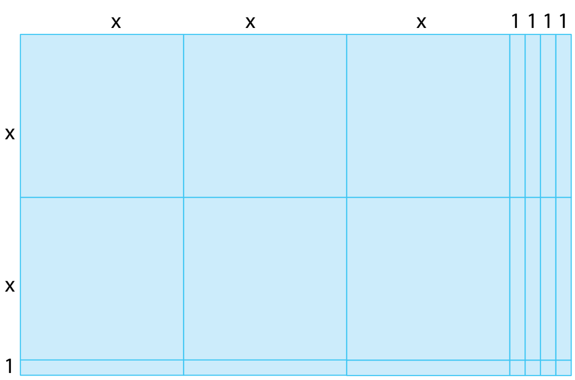
16. Aşağıdaki eşitliklerden doğru olanların başındaki kutucuğa "D", yanlış olanların başındaki kutucuğa "Y" yazınız.

- ☐ $8x^2 = 4x \cdot 2x$
- ☐ $-25xy^2 = 5x(-5 \cdot y) \cdot y$
- ☐ $14xy = (2x) \cdot (7)$
- ☐ $18xy = 9x \cdot 2y$
- ☐ $-4x^2y^3 = (4x^2) \cdot (4y) \cdot y$
- ☐ $-2x^2y^2 = (-2x) \cdot x \cdot y \cdot y$

17. $(4x - 6) \cdot (3x + 2)$ çarpımının bir terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) -12 B) $-18x^2$ C) $4x^2$ D) $-18x$

18.



Yukarıda modellenen cebirsel ifadelerle çarpma işlemini aşağıda boş bırakılan yere yazınız.

.... = ...

19. $2(2x - 1)$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4x - 2$ B) $-12x - 6x$

C) $4x - 1$ D) $4x + 2$

20. $4x^2 - 12x + 9$ ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2x - 3)$ B) $(4x + 3)$

C) $(4x - 3)$ D) $(2x + 3)$

21. $k^2 + A + 16m^2$ ifadesi tam kare bir ifade ise A yerine aşağıdakilerden hangisi gelebilir?

A) $4km$ B) $8km$ C) $-4km$ D) $-16km$

22. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $9a^2 - 30ab + 25b^2 =$ ....

b) $k^2 - 4mk + 4m^2 =$ ....

23. $9a^2 - 4b^2$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hâli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(3a + 2b) \cdot 2b$

B) $(3a - 2b) \cdot (3a + 2b)$

C) $(9a - 4b) \cdot (9a + 4b)$

D) $(9a - 2b) \cdot 2b$

24. $(a - b)^2 + 4ab$ ifadesinin özdeşi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a^2 - b^2 - 2ab$ B) $(a - b)^2$

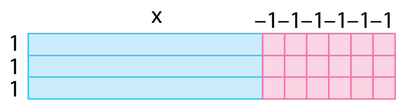
C) $(a + b)^2$ D) $a^2 + b^2$

25. $4x^2 + 4 \cdot axy + 9y^2$ ifadesi bir tam kare ifade ise a'nın değeri kaçtır?

A) 4　　B) 3　　C) 2　　D) 1

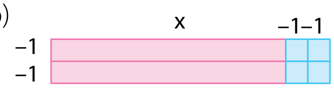
26. Aşağıda, cebirsel ifadelerin çarpımı ile ilgili modeller verilmiştir. Modellere ait cebirsel ifadeleri boş bırakılan yerlere yazınız.

a)



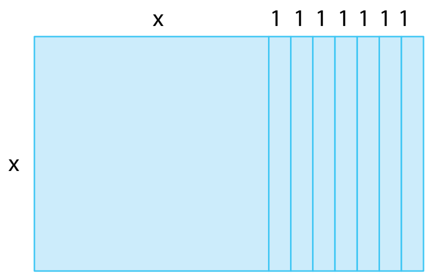
.... = ...

b)



.... = ...

c)



.... = ...

27. Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini yazınız.

$(a - 2b)^2 =$ ....

$(4 + 5y)^2 =$ ....

$(x - y)^2 =$ ....

$(2x + 3y)^2 =$ ....

28. $87^2 - 85^2$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 89　　B) 174　　C) 219　　D) 344

29. $6x^3 - 18x^2$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $6x^2(x - 3)$　　B) $3x^2(2 + 6x)$

C) $2x^2(3x + 9)$　　D) $6x^2(x - 2)$

30. $8xy^3 - 18x^3y$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2xy(2y - 3x)(2y + 3x)$

B) $xy(4x - 3y)(4x + 3y)$

C) $xy(2x - 3y)(2y + 3x)$

D) $2xy(4x - 3y)(4x + 3y)$

31. Bir zar atılarak üste gelen sayı gözlemleniyor. Buna göre aşağıdaki ifalerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) Olası tüm çıktıların sayısı 6'dır.

B) Her bir yüzün üste gelme şansı eşittir.

C) Üste gelen yüzdeki noktaların sayısının çift ya da tek olma şansları eşittir.

D) Üste gelen noktaların sayısının 7'den küçük olma olasılığı 0'dır.

4. ÜNİTE

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

Sıcak hava balonlarının havada yüzebilmesi için balon içindeki gazın yoğunluğunun havanın yoğunluğundan daha az olması gerekir.

Balonun içindeki gazın yoğunluğu < Havanın yoğunluğu ise balon yükselir.

Balonun içindeki gazın yoğunluğu > Havanın yoğunluğu ise balon alçalır.

Balonun içindeki gazın yoğunluğu = Havanın yoğunluğu ise balon havada asılı kalır.

4.1. Bölüm
Doğrusal Denklemler

Trafikte yolun eğimli olduğunu belirten uyarıcı levhalar vardır. Sürücüler bu levhaları gördüklerinde yolun eğimine uygun hareket ederler.

Tehlikeli Eğim (Çıkış)

Bu levha, çıkış eğimli yol kesimine girileceğini bildirir. Bu eğimli kesimi rahat çıkmak için uygun vitese geçilir, diğer işaretlerle bildirilen hususlara uyulur.

Tehlikeli Eğim (İniş)

Bu levha, iniş eğimli yol kesimine girileceğini bildirir. İniş eğimli yol kesimini, çıkışta kullanılan vitesle inmek gerekir.

Terimler veya Kavramlar

- *Bağımlı değişken*
- *Bağımsız değişken*
- *Doğrusal denklem*
- *Eğim*

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı gibi matematikte öğrendiğimiz eğim ile ilgili bilgileri yaşantımızın pek çok alanında kullanmaktayız.

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri çözme*
- *Koordinat sistemini özellikleriyle tanıma ve sıralı ikilileri gösterme*
- *Aralarında doğrusal ilişki bulunan iki değişkenden birinin diğerine bağlı olarak nasıl değiştiğini tablo ve denklem ile ifade etme*
- *Doğrusal denklemlerin grafiğini çizme*
- *Doğrusal ilişki içeren günlük yaşam durumlarına ait denklem, tablo ve grafiği oluşturup yorumlama*
- *Doğrunun eğimi*

4.1.1. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

1. Problem

Göknur öğretmen, ihtiyaç duyduklarında öğrencilerine vermek için fiyatı 2 ve 3 lira olan silgilerden 12 tane aldı. Toplam 28 lira ödedi. Göknur, 3 liralık silgilerden kaç tane almıştır?

Bilgi Kutusu

*Cebirsel ifade içeren eşitliklerde sembollerle gösterilen ifadelere **bilinmeyen** denir.*

*İçinde en az bir bilinmeyen bulunan eşitliklere **denklem** denir.*

*Bilinmeyeni bulma işlemine **denklemi çözmek** denir.*

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

- Verilen ve istenenleri belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Silgilerin fiyatları: 2 TL, 3 TL Alınan toplam silgi sayısı: 12 Ödenen para: 28 TL	Alınan 3 liralık silgi sayısı: ?

2. Çözümü Planlayalım

- Verilenleri cebirsel olarak ifade edelim.

Toplam 12 tane silgi alınmıştır. Buna göre;

x: 3 liralık silgi sayısı,

12 – x: 2 liralık silgi sayısıdır.

3 liralık silgilere ödenen para: 3x,

2 liralık silgilere ödenen para: 2(12 – x)'tir.

Toplam ödenen para: 28 TL'dir.

O hâlde denklem $3x + 2(12 - x) = 28$ olur.

Bilgi Kutusu

Bir eşitliğin her iki tarafı aynı sayı ile toplandığında ya da çıkarıldığında eşitliğin değeri değişmez.

3. Planı Uygulayalım

- Denklemi sağlayan x değerini bulalım.

$3x + 2(12 - x) = 28$

$3x + 24 - 2x = 28$

$x + 24 = 28$

$x = 28 - 24$ ise $x = 4$ bulunur.

O hâlde Göknur, 3 liralık silgilerden 4 tane almıştır.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

  3 liralık silgi sayısı 4 ise 2 liralık silgi sayısı $12 - 4 = 8$ olur.

  $3 \cdot 4 = 12$ TL 3 liralık silgilere ödenen para

  $2 \cdot 8 = 16$ TL 2 liralık silgilere ödenen para

  $12 + 16 = 28$ TL olduğuna göre bulunan sonuç doğrudur.

1. Örnek

Aşağıda verilen denklemleri sağlayan x değerlerini bulalım.

a) $3(x - 5) + 7 = 6x + 1$ **b)** $5x - 4 + 2(x + 2) = 3x + 8$ **c)** $2x + 3(x - 9) = 7 - 2x$

Çözüm

a)
$$3(x - 5) + 7 = 6x + 1$$
$$3x - 15 + 7 = 6x + 1$$
(Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden yararlandık.)
$$3x - 8 = 6x + 1$$
$$3x - 6x = 1 + 8$$
$$\frac{-3x}{-3} = \frac{9}{-3}$$
(Eşitliğin her iki tarafını –3'e böldük.)
$$x = -3$$

Bu denklemi sağlayan x değeri –3'tür.

b)
$$5x - 4 + 2(x + 2) = 3x + 8$$
$$5x - 4 + 2x + 4 = 3x + 8$$
$$7x = 3x + 8$$
$$7x - 3x = 8$$
$$4x = 8$$
$$x = 2$$

Bu denklemi sağlayan x değeri 2'dir.

c)
$$2x + 3(x - 9) = 7 - 2x$$
$$2x + 3x - 27 = 7 - 2x$$
$$5x - 27 = 7 - 2x$$
$$5x + 2x = 7 + 27$$
$$7x = 34$$
$$x = \frac{34}{7}$$

Bu denklemi sağlayan x değeri $\frac{34}{7}$ dir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a) $-6 + 2(3x - 7) = 4x - 5$

b) $5(x - 1) + 3(x - 3) = -2x + 7$

Etkinlik

Aşağıda $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = \frac{5}{8}$ denkleminin çözümü verilmiştir. İnceleyiniz.

1 → $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = \frac{5}{8}$

2 → $\underset{(4)}{} \quad \underset{(2)}{}$

3 → $\frac{4x}{8} + \frac{6x}{8} = \frac{5}{8}$

4 → $\frac{4x + 6x}{8} = \frac{5}{8}$

5 → $8 \cdot \frac{10x}{8} = \frac{5}{8} \cdot 8$

6 → $10x = 5$

7 → $\frac{10}{10}x = \frac{5}{10}$

8 → $x = \frac{1}{2}$

Çözüme göre aşağıda verilen soruları yanıtlayınız.

- Denklem çözümünde cebirsel ifadelerle yapılan işlemlerden nasıl yararlanılmıştır?
- İlk adımda neden payda eşitlenmiştir?
- Çözümün 5. adımında eşitliğin her iki tarafı neden 8 ile çarpılmıştır?
- Çözümün 7. adımında eşitliğin her iki tarafı neden 10 ile bölünmüştür?

Sorulara verdiğiniz yanıtlardan yararlanarak katsayıları rasyonel olan denklemleri çözmek için bir yol geliştiriniz.

2. Örnek

Aşağıda verilen denklemleri sağlayan x değerlerini bulalım.

a) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{x}{5} - 3 = \frac{3x}{4} + 1$

Çözüm

a) $\frac{2x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{5}{2}$ (Denklemde paydaları eşitleyelim.)

$$\underset{(2)}{\frac{2x}{3}} - \frac{x}{6} = \underset{(3)}{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{4x}{6} - \frac{x}{6} = \frac{15}{6}$$

$$\frac{3x}{6} = \frac{15}{6}$$

$$\cancel{6} \cdot \frac{3x}{\cancel{6}} = \frac{15}{\cancel{6}} \cdot \cancel{6}$$ (Eşitliğin her iki tarafını 6 ile çarptık.)

$$3x = 15$$

$$x = 5$$

Bu denklemi sağlayan x değeri 5'tir.

b) $\frac{x}{5} - 3 = \frac{3x}{4} + 1$

$$\underset{(4)}{\frac{x}{5}} - \underset{(5)}{\frac{3x}{4}} = 3 + 1$$

$$\frac{4x}{20} - \frac{15x}{20} = \underset{(20)}{\frac{4}{1}}$$

$$\frac{-11x}{20} = \frac{4 \cdot 20}{20}$$

$$\cancel{20} \cdot \frac{-11x}{\cancel{20}} = \frac{80}{\cancel{20}} \cdot \cancel{20}$$

$$-11x = 80$$

$$\frac{-11}{-11}x = \frac{80}{-11}$$

$x = -\frac{80}{11}$ Bu denklemi, $-\frac{80}{11}$ değeri sağlar.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a) $\frac{3x}{5} - \frac{4x}{10} = \frac{-7}{2}$

b) $\frac{2x}{4} + 5 = \frac{-2x}{5} - 3$

3. Örnek

Aşağıda verilen denklemleri sağlayan x değerlerini bulalım.

a) $\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{2x+1}{5}=\dfrac{-3}{10}$ b) $\dfrac{2x+1}{4}-\dfrac{5-x}{5}=\dfrac{x+7}{2}$

Çözüm

a) $\dfrac{x-3}{\underset{(5)}{2}}+\dfrac{2x+1}{\underset{(2)}{5}}=\dfrac{-3}{10}$

$\dfrac{5x-15}{10}+\dfrac{4x+2}{10}=\dfrac{-3}{10}$ (Paydaları eşitledik.)

$\dfrac{5x-15+4x+2}{10}=\dfrac{-3}{10}$

$\cancel{10}\cdot\dfrac{9x-13}{\cancel{10}}=\dfrac{-3}{\cancel{10}}\cdot\cancel{10}$ (Eşitliğin her iki tarafını 10 ile çarptık.)

$9x-13=-3$

$9x=-3+13$

$9x=10$

$x=\dfrac{10}{9}$ Bu denklemi, $\dfrac{10}{9}$ değeri sağlar.

b) $\dfrac{2x+1}{\underset{(5)}{4}}-\dfrac{5-x}{\underset{(4)}{5}}=\dfrac{x+7}{\underset{(10)}{2}}$

$\dfrac{10x+5}{20}-\dfrac{20-4x}{20}=\dfrac{10x+70}{20}$

$\dfrac{10x+5-20+4x}{20}=\dfrac{10x+70}{20}$

$\cancel{20}\cdot\dfrac{14x-15}{\cancel{20}}=\dfrac{10x+70}{\cancel{20}}\cdot\cancel{20}$

$14x-15=10x+70$

$14x-10x=70+15$

$4x=85$

$x=\dfrac{85}{4}$ Bu denklemi, $\dfrac{85}{4}$ değeri sağlar.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a) $\dfrac{x+3}{3}+\dfrac{3x-2}{4}=\dfrac{-7}{12}$ b) $\dfrac{3x-1}{4}-\dfrac{4-2x}{8}=\dfrac{x-3}{2}$

2. Problem

Bir terzi, ilkokul öğretmenine hediye etmek için elindeki kumaşın $\frac{2}{5}$'i ile elbise, $\frac{1}{3}$'ü ile ceket dikti. Terzinin 4 m kumaşı kaldı. Başlangıçta kaç metre kumaşı vardı?

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

Verilenler	İstenen
Harcanan kumaş: Kumaşın $\frac{2}{5}$'i ile $\frac{1}{3}$'ü Kalan kumaş: 4 m	Başlangıçtaki kumaş miktarı: ?

2. Çözümü Planlayalım

Problem ile ilgili cebirsel ifadeyi yazalım.

x: Kumaş miktarı

Harcanan kumaş: $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x$

Kalan kumaş: 4m

O hâlde denklem $x - \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x\right) = 4$ olur.

3. Planı Uygulayalım

Denklemi sağlayan x değerini bulalım.

$$x - \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x\right) = 4$$

$$\underset{(15)}{\frac{x}{1}} - \left(\underset{(3)}{\frac{2x}{5}} + \underset{(5)}{\frac{x}{3}}\right) = \underset{(15)}{\frac{4}{1}}$$

$$\frac{15x}{15} - \left(\frac{6x}{15} + \frac{5x}{15}\right) = \frac{60}{15}$$

$$\frac{15x}{15} - \frac{11x}{15} = \frac{60}{15}$$

$$15x - 11x = 60$$

$$4x = 60$$

$$x = 15 \text{ m}$$

Başlangıçtaki kumaş miktarı 15 m'dir.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

15 m'lik kumaşın $\frac{2}{5}$'si: $15 \cdot \frac{2}{5} = 6$ m eder. Bu, elbise için kullanılan miktardır.

15 m'lik kumaşın $\frac{1}{3}$'i: $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$ m eder. Bu da ceket için kullanılmıştır.

Toplam $6 + 5 = 11$ m

$11 + 4 = 15$ m Bulunan sonuç doğrudur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki denklemleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

a) $\frac{x}{2} - \frac{x}{7} = 4$

b) $\frac{3x}{5} + \frac{x}{3} = -\frac{4}{15}$

c) $5 - \frac{x}{6} = -3x + 1$

ç) $\frac{x+1}{3} - 2 = \frac{2x}{3} - 7$

d) $\frac{x-3}{6} + \frac{2x}{3} = \frac{1-x}{2} + 1$

e) $\frac{x+5}{6} + \frac{2x}{3} = \frac{1-x}{2} + 1$

f) $\frac{2x-3}{4} + \frac{x}{8} = x - 3$

g) $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + 3 = \frac{9}{10} - x$

ğ) $\frac{3-x}{3} - \frac{2x-2}{9} = 4 - \frac{x}{3}$

h) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{5x}{6} = 1 + \frac{2x}{3}$

2. Aşağıda verilen denklemin çözüm basamaklarının ilk hangisinde hata yapılmıştır?

1. Adım: $\underset{(2)}{\frac{x-6}{2}} - \frac{3x+1}{4} = \underset{(2)}{\frac{-5}{2}}$

2. Adım: $\frac{2x-12}{4} - \frac{3x+1}{4} = \frac{-10}{4}$

3. Adım: $\frac{2x-12-3x+1}{4} = \frac{-10}{4}$

4. Adım: $4 \cdot \frac{2x-12-3x+1}{4} = \frac{-10}{4} \cdot 4$

5. Adım: $-x - 11 = -10$

6. Adım: $x = -21$

3. Bir sınıfın $\frac{2}{5}$'si kızdır. Sınıfta 18 erkek öğrenci olduğuna göre sınıf mevcudu kaçtır?

4. Bir top kumaşın önce $\frac{1}{4}$'i sonra kalan kısmının $\frac{1}{6}$'i satılıyor. 7 m kumaş kaldığına göre bir top kumaş kaç m'dir?

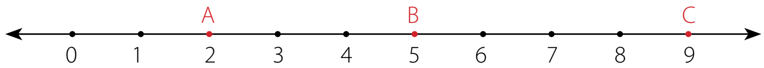
5. $\frac{2x+6}{4} = 3x - a$ denklemini sağlayan x değeri 1 ise a kaçtır?

A) -10 B) -5 C) 1 D) 5

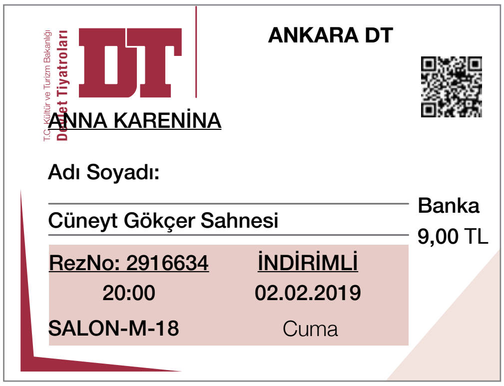
4.1.2. Koordinat Sistemi

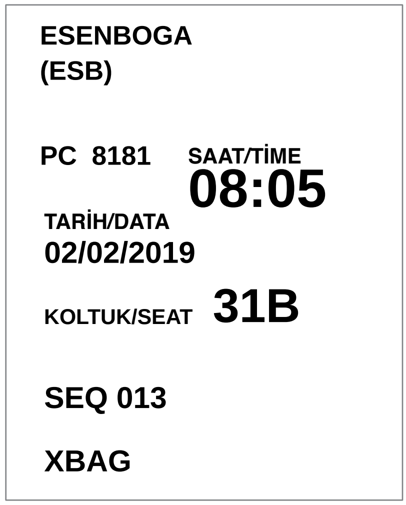
Hatırlayalım

A(2), B(5) ve C(9) noktalarının sayı doğrusundaki yerleri aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde gösterilmiştir.



Spor karşılaşmalarına, sinemaya, tiyatroya gitmek, uçağa binmek için bilet alırız. Aldığımız biletin üzerinde oturacağımız koltuğun sıra numarası ve koltuk numarası yazar. Koltuğumuzun yerini önce sıra numarasını sonra koltuk numarasını belirleyerek buluruz.



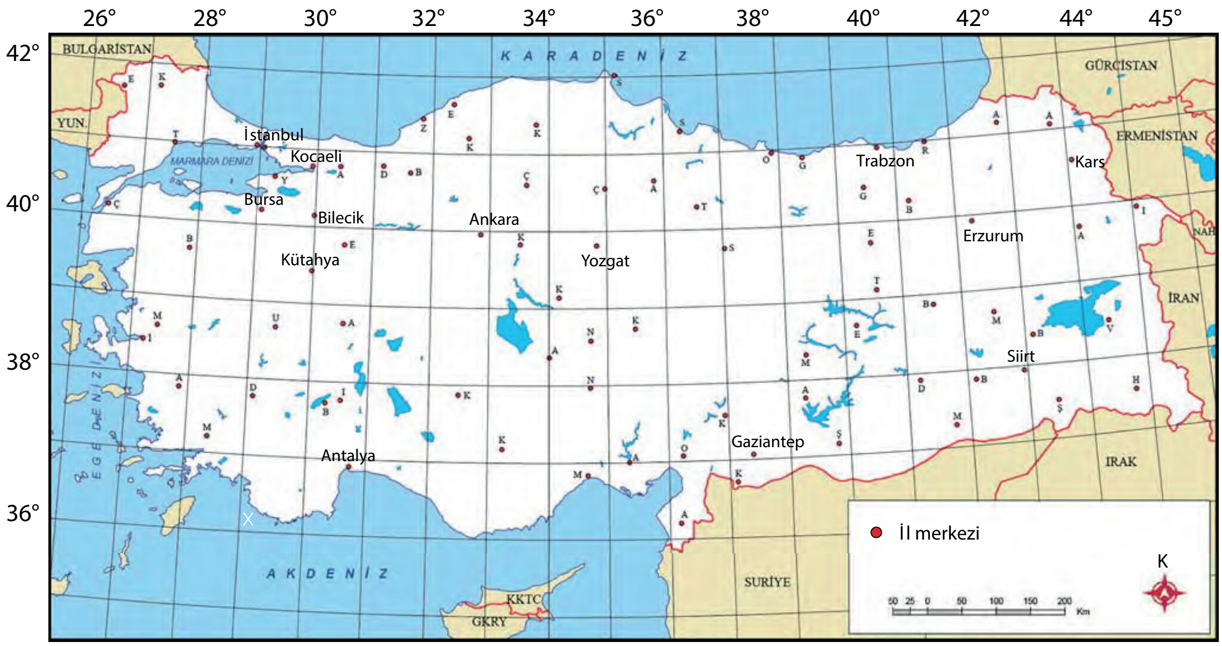


Sinema biletinizin üzerinde sıra no O, koltuk no 12 yazıyorsa O sırasından 12 numaralı koltuğu bulup oturursunuz. Bu numaralar sizin koltuğunuzun koordinatlarıdır.

Araçlarda sık sık kullandığımız navigasyon cihazları da koordinat sistemini prensip alarak çalışır. Gideceğimiz yerin adresini yazdığımızda navigasyon bize o yerin koordinat sistemindeki konumunu gösterir ve tarif eder. Denizcilik ve hava taşımacılığında koordinatlardan yararlanarak rota belirlenir. Koordinat sistemi haritacılıkta, mühendislikte, askeri alanda, coğrafyada astronomide gibi daha bir çok alanda kullanılır.

1. Örnek

Aşağıda Türkiye haritası enlem ve boylamlarıyla verilmiştir. İstanbul ve Siirt ilinin koordinatlarını belirleyelim.



Çözüm

Harita üzerinde bir nokta veya yerin belirtilmesi için o yerin koordinatlarına bakmalıyız. Coğrafi koordinatlar enlem ve boylamlardan oluşur.

Yukarıdaki haritada İstanbul ilinin koordinatlarının 41° enlem , 29° boylamı, Siirt ilinin koordinatlarının 38° enlem, 42° boylamı olduğunu görülmektedir.

Etkinlik

Araç ve Gereç: kareli kâğıt, kalem

- Defterinize bir nokta işaretleyiniz. Bu nokta orijin olsun.
- Bu noktada dik kesişen yatay ve dikey iki doğru çiziniz.
- Bu doğruların arasında başka bir nokta işaretleyiniz. Noktayı A ile adlandırınız.
- A noktasından x eksenine bir dik doğru parçası çiziniz.
  - ✓ Çizdiğiniz doğru parçasının x eksenini kestiği nokta orijinden kaç birim uzaklıktadır? Not ediniz.
- A noktasından y eksenine bir doğru parçası çiziniz.
  - ✓ Çizdiğiniz doğru parçasının y eksenini kestiği nokta orijinden kaç birim uzaklıktadır? Not ediniz.
  - ✓ A noktasının koordinatlarını sıralı ikili şeklinde yazınız.

Bilgi Kutusu

Biri yatay diğeri düşey iki sayı doğrusunun 0 noktasında dik olarak kesişmesiyle oluşan sisteme ***koordinat sistemi*** *denir.*

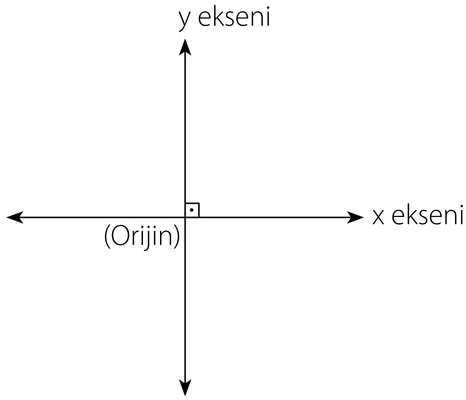
Koordinat sisteminde yatay olan eksene ***x ekseni****, düşey olan eksene* ***y ekseni*** *denir.*

İki eksenin kesiştiği noktaya ***orijin (başlangıç noktası)*** *denir.*

2. Örnek

Koordinat sistemi çizerek eksenleri ve başlangıç noktasını gösterelim.

Çözüm



Bilgi Kutusu

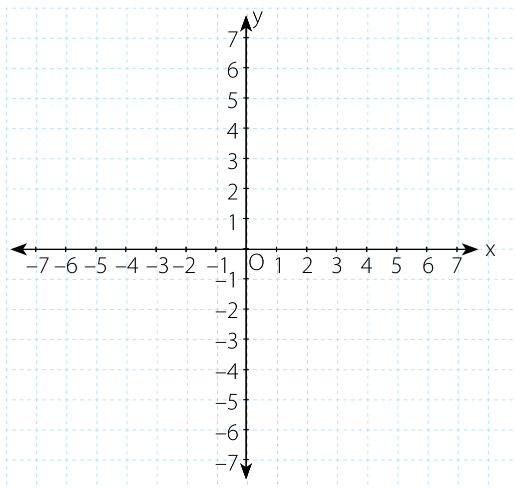
Koordinat sisteminde bir noktayı gösteren sayı ikilisine ***sıralı ikili*** *denir. Bir noktayı gösteren sıralı ikililer o noktanın koordinatlarını belirtir. (x, y) sıralı ikilisinde x sayısına* ***birinci bileşen****, y sayısına ise* ***ikinci bileşen*** *denir. Bir sıralı ikilide birinci bileşen x eksenine, ikinci bileşen y eksenine karşılık gelen sayıyı gösterir.*

3. Örnek

Koordinat sisteminde x ve y eksenlerindeki noktaları gösterelim.

Çözüm

x ve y eksenleri birer sayı doğrusu olduğundan 0 başlangıç noktasını, negatif ve pozitif noktaları işaretleyelim.



4. Örnek

Aşağıda verilen noktaların koordinat sisteminde kaçıncı bölgede olduğunu belirleyelim.

A(–5, 7) B(–9, -6) C(4, 8) D(7, –3)

Çözüm

A(–5, 7) noktasının birinci bileşeni negatif, ikinci bileşeni pozitiftir. O hâlde A noktası 2. bölgededir.

B(–9, -6)) noktasının birinci ve ikinci bileşeni negatiftir. O hâlde B noktası 3. bölgededir.

C(4, 8) noktasının birinci ve ikinci bileşeni pozitiftir. O hâlde C noktası 1. bölgededir.

D(7, –3) noktasının birinci bileşeni pozitif, ikinci bileşeni negatiftir. O hâlde D noktası 4. bölgededir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen noktaların koordinat sisteminde kaçıncı bölgede olduğunu belirleyiniz.

A(3, 6) B(–4, 3) C(5, –8) D(–2, –1)

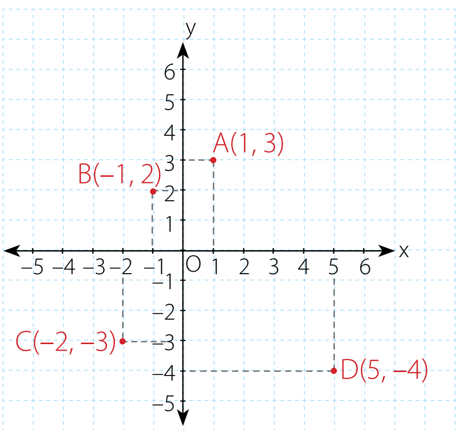
5. Örnek

A(1, 3), B(–1, 2), C(–2, –3), D(5, –4) noktalarını koordinat sisteminde gösterelim ve bölgelerini belirleyelim.

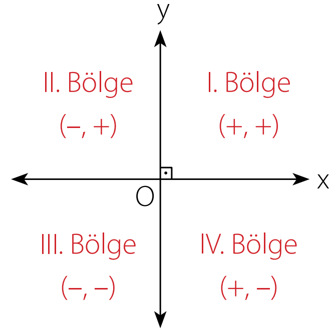
Çözüm

A(1, 3) sıralı ikilisinde 1, x eksenine karşılık gelen sayıyı; 3, y eksenine karşılık gelen sayıyı gösterir.

B(–1, 2), C(–2, –3) ve D(5, –4) noktalarını aynı şekilde koordinat sisteminde gösterelim.



Bilgi Kutusu



Eksenler, koordinat sistemini 4 bölgeye ayırır.

I. bölgede, x ve y değerleri pozitiftir.

II. bölgede x değerleri negatif, y değerleri pozitiftir.

III. bölgede x ve y değerleri negatiftir.

IV. bölgede x değerleri pozitif, y değerleri negatiftir.

Koordinat sisteminde de görüldüğü gibi;

A noktası 1. bölgededir.

B noktası 2. bölgededir.

C noktası 3. bölgededir.

D noktası 4. bölgededir.

3. Örnek

Aşağıda verilen noktaları koordinat sisteminde gösterelim.

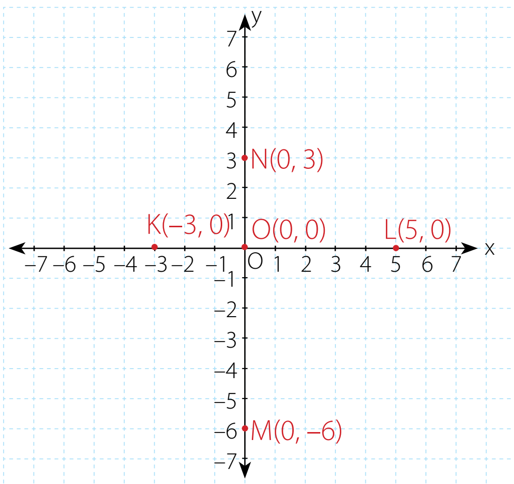
O(0, 0) K(–3, 0) L(5, 0) M(0, –6) N(0, 3)

Çözüm

O(0, 0) noktası orijindir.

K(–3, 0) ve L(5, 0) noktalarının ikinci bileşenleri 0'dır. O hâlde K ve L noktaları x ekseni üzerindedir.

M(0, –6) ve N(0, 3) noktalarının birinci bileşenleri 0'dır. O hâlde M ve N noktaları y ekseni üzerindedir.



Bilgi Kutusu

x ekseni üzerindeki noktaların ikinci bileşenleri, y ekseni üzerindeki noktaların birinci bileşenleri 0'dır.

Orijinin koordinatları O(0, 0)'dır.

Sıra Sizde

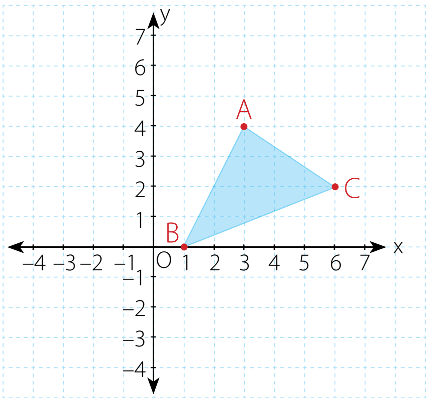
Aşağıda verilen noktaları koordinat sisteminde gösteriniz.

E(1, –5) F(–3, –1) G(5, 6)

H(–4, 2) K(4, 0) L(0, –2)

7. Örnek

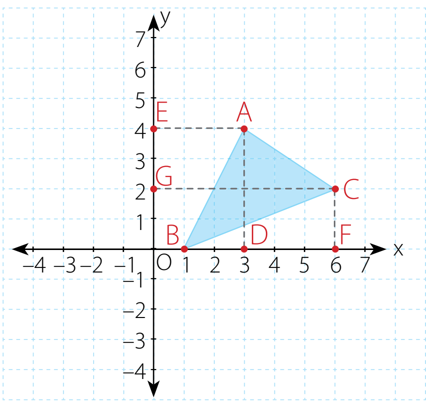
Aşağıdaki koordinat sisteminde verilen üçgenin köşe noktalarının koordinatlarını yazalım.



Çözüm

B noktası x ekseni üzerindedir. O hâlde y değeri 0 olmalıdır. B noktasının koordinatları B(1, 0) olur.

A ve C noktaları için x ve y eksenlerine dikmeler çizelim.

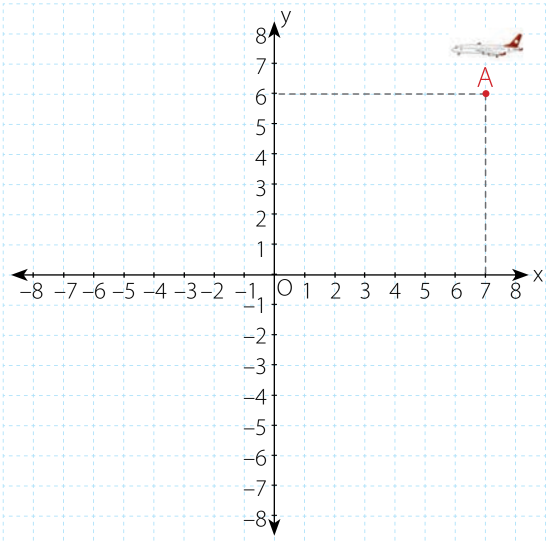


A noktasından x eksenine çizdiğimiz dikme 3 noktasına, y eksenine çizdiğimiz dikme 4 noktasına denk gelmektedir. O hâlde A noktasının koordinatları A(3, 4) olur.

C noktasından x eksenine çizdiğimiz dikme 6 noktasına, y eksenine çizdiğimiz dikme 2 noktasına denk gelmektedir. O hâlde C noktasının koordinatları C(6, 2) olur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Uçağın bulunduğu A noktasının koordinatları nedir?



2. Aşağıda verilen ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

☐ Koordinat sisteminde yatay olan sayı doğrusu x eksenidir.

☐ Orijinin koordinatları (0, 0)dır.

☐ y ekseni üzerindeki noktaların ikinci bileşenleri 0'dır.

☐ x ekseni üzerindeki noktaların ikinci bileşenleri 0'dır.

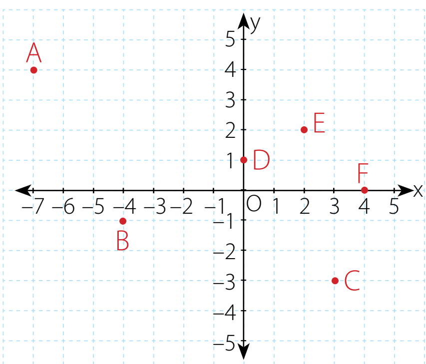
☐ Koordinat sisteminde düşey olan sayı doğrusu y eksenidir.

☐ Koordinat sisteminde noktaların koordinatları sıralı ikililer şeklinde verilir.

3. Aşağıda verilen noktaları koordinat sisteminde gösteriniz.

A(-5, 0) B(1, 4) C(2, -6) D(0, -4) E(-8, -4) F(-7, 0) G(3, -5)

4. Koordinat sisteminde işaretlenen noktaların koordinatlarını yazınız.



4.1.3. Doğrusal İlişki

Bir araç, şehirler arası bir yolda 1 L benzinle 15 km, 2 L benzinle 30 km, 3 L benzinle 45 km, 4 L benzinle 60 km, 5 L benzinle 75 km yol almaktadır.

Bu durumu tablo ile gösterelim.

Yakıt Miktarı (L)	0	1	2	3	4	5	....
Gittiği Yol (km)	0	15	30	45	60	75	....

Tabloda görüldüğü gibi kullanılan benzin miktarı arttıkça gidilen yol da artmaktadır. O hâlde kullanılan benzin miktrarını "x", gidilen yolun uzunluğunu "y" ile gösterelim. Burada "x" bağımsız değişken, "y" bağımlı değişkendir. Çünkü "x" değiştikçe "y" de değişir. Her litre benzinle 15 km yol alındığında x ile y arasındaki ilişki, $y = 15x$ olur.

$y = 15x$, bir doğrusal denklemdir.

(x) Litre	(y) Yol (km)
$x = 1$ için	$y = 1 \cdot 15 = 15$
$x = 2$ için	$y = 2 \cdot 15 = 30$
$x = 3$ için	$y = 3 \cdot 15 = 45$
$x = 4$ için	$y = 4 \cdot 15 = 60$
$x = 5$ için	$y = 5 \cdot 15 = 75$

y değişkeninin x değişkenine göre aldığı değerleri sıralı ikili biçiminde gösterelim.

(1, 15), (2, 30), (3, 45), (4, 60), (5, 75)

Bilgi Kutusu

İki değişkenden birinin değeri, diğer değişkenin aldığı değere göre değişir. Bu durumda değişkenlerden biri bağımlı, diğeri bağımsız değişken olur.

Örneğin; $y = ax + b$ denkleminde x'e verilen değere göre y değişir.

*Bu denklemde x'e **bağımsız değişken,** y'ye **bağımlı değişken** denir.*

1. Örnek

Oğuz, üniversiteye giriş sınavına hazırlanmaktadır. İlk gün 100 soru çözmüştür. Sonraki günler bir önceki gün çözdüğü soru sayısından 20 tane daha fazla soru çözmüştür. Oğuz'un 7 gün boyunca çözdüğü soru sayısı ile soru çözdüğü gün sayısı arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

Çözüm

Oğuz'un çözdüğü soru sayısına "y", soru çözdüğü gün sayısına "x" diyelim. Bu durumda x ile y arasındaki ilişki

$y = 100 + 20(x - 1)$ olur.

Gün sayısı arttıkça çözülen soru sayısı da artmaktadır. y ile x arasındaki ilişki doğrusal ilişkidir. y değişkeni x değişkenine bağlı olarak değişmektedir.

Gün sayısı	Çözülen soru sayısı
1	100
2	120
3	140
4	160
5	180
6	200
7	220

Oğuz

1. gün $y = 100 + 20(1 - 1) = 100$

2. gün $y = 100 + 20(2 - 1) = 120$

3. gün $y = 100 + 20(3 - 1) = 140$

4. gün $y = 100 + 20(4 - 1) = 160$

5. gün $y = 100 + 20(5 - 1) = 180$

6. gün $y = 100 + 20(6 - 1) = 200$

7. gün $y = 100 + 20(7 - 1) = 220$ soru çözmüş olur.

Bu durumu sıralı ikililer şeklinde gösterelim.

(1, 100), (2, 120), (3, 140), (4, 160), (5, 180), (6, 200), (7, 220)

2. Örnek

Aşağıda verilen hangi ifadelerde değişkenler arasında doğrusal ilişki vardır? Bulalım.

a) Alınan ekmek sayısı ile ödenen para arasındaki ilişki

b) Gidilen yol ile kullanılan benzin arasındaki ilişki

c) Bankaya vadesiz bir hesaba yatırılan para ile artış miktarı arasındaki ilişki

ç) Taksiye bindiğinizde gidilen yol ile ödenecek para arasındaki ilişki

Çözüm

a) Aldığımız ekmek sayısına göre ödeyeceğimiz parada düzenli olarak artar. Bu sebeple bu bir doğrusal ilişkidir.

b) Gidilen yol arttıkça kullanılan benzin miktarı düzenli olarak artar. Bu sebeple bu bir doğrusal ilişkidir.

c) Bankaya vadesiz bir hesaba yatırdığınız para da hiç bir artış olmaz. Bu sebeple bu bir doğrusal ilişki değildir.

ç) Taksiye bindiğinizde açılış ücretinden sonra gidilen yol arttıkça ödenecek para düzenli olarak artar. Bu sebeple bu bir doğrusal ilişkidir.

3. Örnek

$y = x + 5$ doğrusal ilişkisinde x yerine 1, 2, 3 değerlerini yazarak y değerlerini bulalım.

Çözüm

$x = 1$ için $y = 1 + 5 = 6$ olur. Bu durumu (1, 6) ile gösteririz.

$x = 2$ için $y = 2 + 5 = 7$ olur. Bu durumu (2, 7) ile gösteririz.

$x = 3$ için $y = 3 + 5 = 8$ olur. Bu durumu (3, 8) ile gösteririz.

4. Örnek

Yandaki tabloya göre x ve y arasındaki artış miktarını bulalım ve buna uygun doğrusal ilişkiyi yazalım.

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7

Çözüm

Tablodaki değerleri ikililer şeklinde yazalım. (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7) sıralı ikililerde görüldüğü gibi y değerleri x değerlerinin 2 fazlasıdır. O hâlde y ile x değişkenleri arasındaki ilişki

$y = x + 2$ olur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Ayşe, arabayla ailesini ziyarete gitmeye karar verir. Arabasında 60 L benzin vardır. Her 100 kilometre de 6 L benzin azalmaktadır. Kilometre arttıkça arabanın benzin deposunda kalan benzin miktarı arasındaki doğrusal ilişki denklemini yazınız.
2. Doğduğunda 52 cm olan Tuna, ilk yıl her ay 2 cm uzamıştır. Tuna'nın boy uzunluğu ile geçen süre arasındaki doğrusal ilişki denklemini yazınız. Tuna 1 yaşında olduğunda boyu kaç cm olur?
3. Bir fidan dikildiğinde 50 cm uzunluğundadır. Her gün 2 mm uzamaktadır. Geçen gün sayısı ile fidanın boyu arasındaki doğrusal ilişki nedir?
4. Tabloya göre x ile y arasındaki doğrusal ilişki nedir?

x	y
1	5
2	7
3	9
4	11

4.1.4. Doğrusal Denklemlerinin Grafikleri

Bir GSM operatörünün gençler için uyguladığı tarifelerde aylık 1000 SMS ve 1 GB İnternet ücreti sabittir ve 15 TL'dir. Bir dakika görüşme için 0,5 TL ücret alınmaktadır. Buna göre tarifeyi inceleyelim ve kullanım süresine göre faturaya yansıyacak ücrete ait grafiğini çizelim.

Firmanın tarifesini gösteren denklemi kuralım. Aylık ödenecek ücret görüşme süresine göre değişeceğinden görüşme süresi bağımsız değişken olur. Buna x diyelim. Ödenecek ücret ise süreye bağlı olacağından bağımlı değişken olur.

Buna da y diyelim.

x: Görüşme süresi   y: Ödenecek ücret

$y = 15 + 0{,}5x$

$y = 15 + 0{,}5x$ denklemi için tablo hazırlayalım.

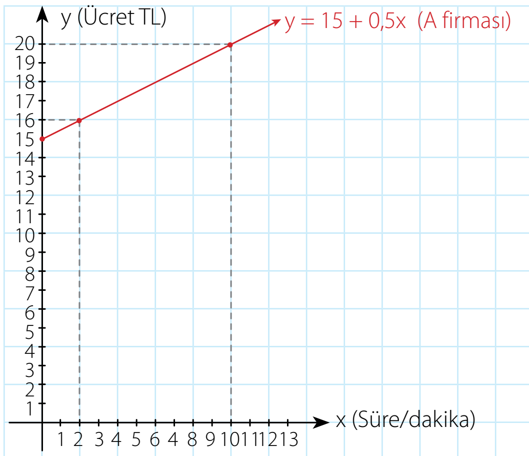
$x = 0$ için $y = 15$ (0, 15)

$x = 2$ için $y = 15 + 1 = 16$ (2, 16)

$x = 10$ için $y = 15 + 0{,}5 \cdot 10 = 15 + 5 = 20$ olur.

x	0	2	10
y	15	16	20

Grafikte de görüldüğü gibi görüşme süresi arttıkça ödenecek ücret artmaktadır.



1 Örnek

y = x + 2 doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm

$y = x + 2$ doğrusal denkleminde x bağımsız, y bağımlı değişkendir. x'e farklı değerler vererek y'nin değerlerini bulalım. Bu sıralı ikilileri koordinat sisteminde göstererek doğruyu çizelim.

$x = -2$ için $y = -2 + 2 = 0$

$x = -1$ için $y = -1 + 2 = 1$

$x = 0$ için $y = 0 + 2 = 2$

$x = 1$ için $y = 1 + 2 = 3$

$x = 2$ için $y = 2 + 2 = 4$

x	–2	–1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

Koordinat sisteminde gösterilecek sıralı ikilileri tabloya bakarak yazalım.

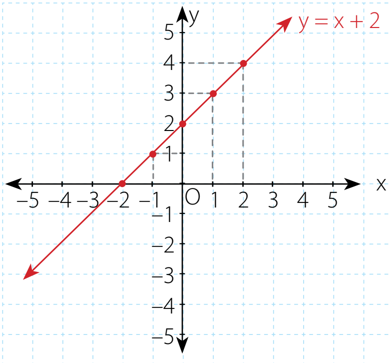
(–2, 0), (–1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)

Bilgi Kutusu

a ve b'den en az biri sıfırdan farklı gerçek sayı olmak üzere y = ax + b biçimindeki doğrusal denklem grafiklerinin x eksenini kestiği noktanın y değeri sıfırdır, y eksenini kestiği noktanın x değeri sıfırdır.

Koordinat sisteminde işaretlediğimiz noktaları bir cetvel yardımıyla birleştirelim.

$y = x + 2$ doğrusu orijinden geçmez.



2. Örnek

$y = 2x - 6$ doğrusunu grafiğini çizelim.

Çözüm

Doğrunun eksenleri kestiği noktaları bulalım.

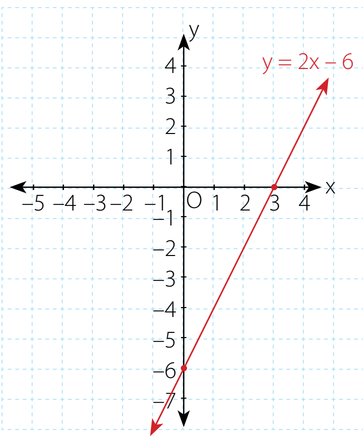
Bunun için $x = 0$ için y'nin alacağı ve $y = 0$ için x'in alacağı değeri bulalım.

$x = 0$ için $\quad y = 2 \cdot 0 - 6 = -6$

$y = 0$ için $\quad 0 = 2x - 6$

$x = 3$

x	0	3
y	–6	0



Koordinat sisteminde gösterilecek sıralı ikililer (0, –6) ve (3, 0)'dır.

Bu noktaları koordinat sisteminde işaretleyip cetvel yardımıyla doğruyu çizelim.

$y = 2x - 6$ doğrusu orijinden geçmez.

Sıra Sizde

Aşağıdaki doğruların grafiklerini çiziniz.

a) $y = 2x + 4$ **b)** $y = 3x - 3$ **c)** $y = 2x - 2$ **ç)** $y = 3x + 1$

3. Örnek

x + y = 4 doğrusunun grafiğini çizelim.

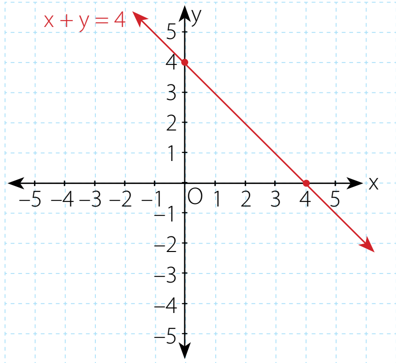
Çözüm

Doğrunun eksenleri kestiği noktaları bulalım.

x = 0 için   0 + y = 4

y = 0 için   x + 0 = 4

x	0	4
y	4	0



(0, 4), (4, 0)

x + y = 4 doğrusu orijinden geçmez.

4. Örnek

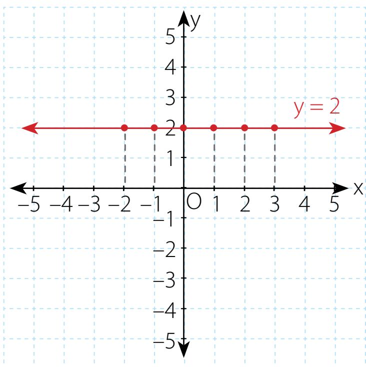
y = 2 doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Doğrunun denkleminde x bağımsız değişkeni yoktur. Bu durumda x'e verilecek her değer için y, 2 değerini alır.

x	–2	–1	0	1	2	3
y	2	2	2	2	2	2

(–2, 2), (–1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), ...



y = 2 doğrusu x eksenine paraleldir.

Bilgi Kutusu

a, sıfırdan farklı bir gerçek sayı olmak üzere y = a şeklindeki doğruların grafiği x eksenine paraleldir.

5. Örnek

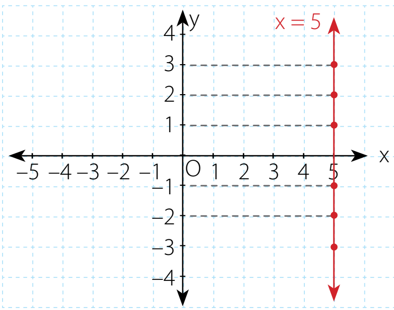
x = 5 doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm

Doğrunun denkleminde x daima 5 değerini almaktadır.

x	5	5	5	5	5	5
y	–2	–1	0	1	2	3

(5, –1), (5, –2), (5, 1), (5, 2), (5, 3), ...



x = 5 doğrusu y eksenine paraleldir.

Bilgi Kutusu

b, sıfırdan farklı bir gerçek sayı olmak üzere x = b şeklindeki doğruların grafiği y eksenine paraleldir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki doğruların grafiklerini çiziniz.

a) x = –2 b) x = 3 c) y = 4 ç) y = –2

6. Örnek

2x + y = 0 doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm

x ve y'ye farklı değerler vererek doğru üzerindeki bazı sıralı ikililerini belirleyelim.

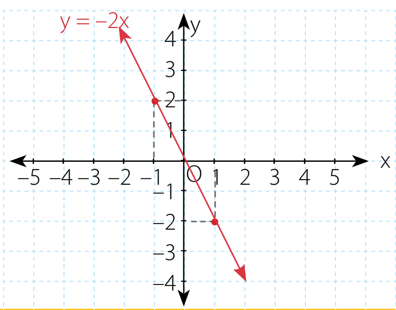
x = 0 için $2 \cdot 0 + y = 0$, y = 0

x = 1 için $2 \cdot 1 + y = 0$, y = –2

x = –1 için $2 \cdot (-1) + y = 0$, y = 2

x	–1	0	1
y	2	0	–2

(–1, 2), (0, 0), (1, –2)



2x + y = 0 doğrusu orijinden geçer.

Bilgi Kutusu

m, bir gerçek sayı olmak üzere y = mx şeklindeki doğruların grafikleri orijinden geçer.

7. Örnek

Aşağıdaki doğruların hangisinin orijinden geçtiğini belirleyelim.

a) $y = x$ **b)** $y = x + 3$ **c)** $y = 4x$

Çözüm

Bir doğru orijinden geçiyorsa denkleminde bağımlı ve bağımsız değişkenlerin dışında sabit sayı bulunmamalıdır. Bu durumda

a) $y = x$ doğrusu orijinden geçer.

b) $y = x + 3$ denklemindeki "+3" teriminden dolayı doğru orijinden geçmez.

c) $y = 4x$ doğrusu orijinden geçer.

Siz de bu doğruların grafiklerini çizerek orijinden geçip geçmediğine bakınız.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

- Bir doğrunun grafiğinin, x eksenini kestiği noktanın y değeri ....'dır.
- Bir doğrunun grafiğinin, y eksenini kestiği noktanın x değeri ....'dır
- y = ... şeklindeki doğru grafikleri orijinden geçer.
- $y = 2x$ denkleminde x, ... değişken; y, ... değişkendir.

2. Aşağıdaki doğruların grafiklerini çiziniz.

a) $y = 2x - 8$ **b)** $y = 3x + 6$

c) $y = 5 - 2x$ **ç)** $y = 10$

d) $x = -8$ **e)** $y = 2x$

f) $y = 3 + x$ **g)** $y = 3x - 2$

ğ) $x + y = 6$ **h)** $3x - y = 0$

ı) $x - y = 4$ **i)** $3 + x + y = 0$

3. Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

☐ $x + 2y = 1$ doğrusu orijinden geçer.

☐ $y = 132$ doğrusu x eksenine paraleldir.

☐ $y - x = 6$ doğrusu x eksenini (6, 0) noktasından keser.

☐ $x = -16$ doğrusu y eksenine paraleldir.

4.1.5. Doğrusal İlişki İçeren Gerçek Hayat Durumları

Selim'in 2500 TL borcu vardır. Söz verdiği tarihte borcunu ödeyebilmek için her ay maaşından 500 TL ayıracaktır.

Selim'in kalan borcuna "y", para biriktirdiği ay sayısına "x" dersek x ile y arasındaki ilişki

$y = -2500 + x \cdot 500$ olur.

Borç	Ay	Ayrılan Para	Kalan Borç
–2500	1	1 • 500 = 500	–2000
–2000	2	2 • 500 = 1000	–1500
–1500	3	3 • 500 = 1500	–1000
–1000	4	4 • 500 = 2000	–500
–500	5	5 • 500 = 2500	0

Aylar geçtikçe borç azaldığından x bağımsız değişken, y bağımlı değişken olur.

1. ayın sonunda $y = -2500 + 1 \cdot 500 = -2000$

2. ayın sonunda $y = -2500 + 2 \cdot 500 = -1500$

3. ayın sonunda $y = -2500 + 3 \cdot 500 = -1000$

4. ayın sonunda $y = -2500 + 4 \cdot 500 = -500$

5. ayın sonunda $y = -2500 + 5 \cdot 500 = 0$

Selim, 5. ayın sonunda borcunu bitirir. Selim'in her ay para biriktirmeye devam ettiğini düşünelim.

Ay	Ayrılan Para	Biriken Para
6	1 • 500 = 500	500
7	2 • 500 = 1000	1000
8	3 • 500 = 1500	1500
9	4 • 500 = 2000	2000
10	5 • 500 = 2500	2500

$y = -2500 + x \cdot 500$ ilişkisi ile;

6. ayın sonunda $y = -2500 + 6 \cdot 500 = 500$ TL

7. ayın sonunda $y = -2500 + 7 \cdot 500 = 1000$ TL

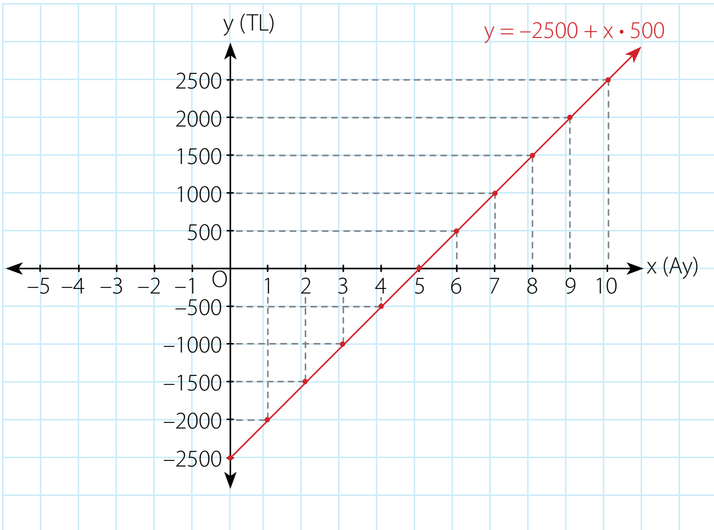
8. ayın sonunda $y = -2500 + 8 \cdot 500 = 1500$ TL

9. ayın sonunda $y = -2500 + 9 \cdot 500 = 2000$ TL

10. ayın sonunda $y = -2500 + 10 \cdot 500 = 2500$ TL birikir.

Selim 10. ayın sonunda 2500 TL biriktirmiş olur.

Bu durumun grafiğini çizelim.



$y = -2500 + 500x$ doğrusal denkleminin grafiği orijinden geçmez. Doğru, x eksenini 5, y eksenini –2500 noktasında keser.

(5, 0) ve (0, –2500) noktaları $y = -2500 + 500x$ doğrusunun üzerindedir.

2. Örnek

Ahmet, 6 ay sonra teslim almak üzere bir bağlama siparişi verdi. Ahmet, usta ile bağlama için 2000 TL'ye anlaştı. Ahmet, bağlama için ayırdığı 2000 TL parasını bankaya vadesiz hesaba yatırır. Bu para üzerinde hiçbir işlem yapılmadığına göre paranın 6 ay sonundaki durumunu inceleyelim.

Çözüm

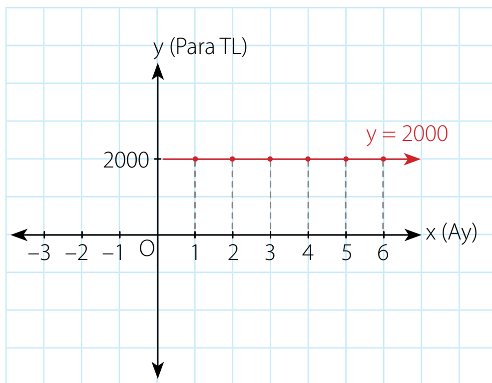
Ay	1	2	3	4	5	6
Para(TL)	2000	2000	2000	2000	2000	2000

Ahmet'in parasında 6 ay sonunda hiçbir değişiklik olmamıştır. x değişkeni hangi değeri alırsa alsın y değişkeninde bir değişiklik olmaz.

O hâlde bu ilişkiyi,

$y = 2000$ olarak belirtebiliriz.

Bu durumu grafikle gösterelim.



$y = 2000$ doğrusunun grafiği, x eksenine paraleldir.

2. Örnek

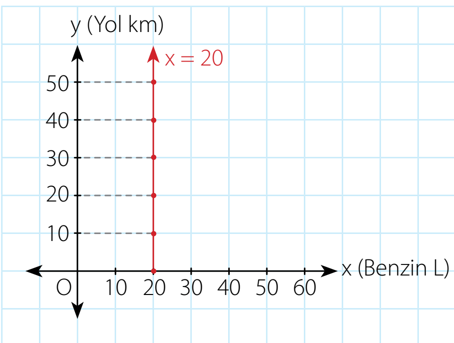
Bir araç hem benzinle hem de LPG ile çalışmaktadır. Araç ilk çalıştırmada bir miktar benzin harcadıktan sonra LPG'ye geçiyor. Bundan sonra gittiği yol süresince hiç benzin harcamıyor. Arabanın deposunda 20 L benzin olduğuna göre LPG'ye geçtikten sonra harcanan benzin miktarı ile gidilen yol arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Çözüm

Arabanın kullandığı benzin ve gittiği yol ilişkisine ait tabloyu oluşturalım.

Yol (km)	0	10	20	30	40	50
Benzin Miktarı(L)	20	20	20	20	20	20

Tablodan da anlaşıldığı gibi depodaki benzin miktarı değişmediği hâlde gidilen yol değişmektedir. O hâlde bu ilişkiyi x = 20 olarak belirtebiliriz. Bunu grafik üzerinde gösterelim.



y ekseni üzerinde gidilen yol artmış fakat harcanan benzin miktarı aynı kalmıştır. Doğru, y eksenine paraleldir ve x eksenini (20, 0) noktasında keser.

3. Örnek

70 km/saat hızla giden bir araç; 1 saat sonunda 70 km, 2 saat sonunda 140 km, 3 saat sonunda 210 km yol gitmiş olur. Bu durumu grafik üzerinde gösterelim.

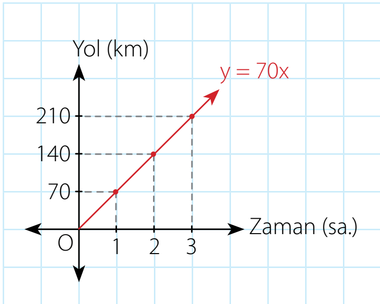
Çözüm

Aracın gittiği yol ile zaman ilişkisine ait tabloyu oluşturalım.

Zaman (sa.)	Yol (km)
0	0
1	70
2	140
3	210

Araç, saatte 70 km yol alıyor ve zaman ilerledikçe gidilen yol miktarı artıyor. Bu durumda zamana "x", gidilen yol miktarına "y" diyelim. x bağımsız değişken, y bağımlı değişkendir. Çünkü y, x'e bağlı olarak değişir. x ile y arasındaki ilişki, y = 70x olur.

y = 70x doğrusal denkleminin grafiği orijinden geçmektedir. Araç, başlangıçta 0 km yol almıştır. Bunu (0, 0) biçiminde gösterebiliriz.



Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Bir araç, saatte 80 km hızla gidiyor. 1 saatte 80 km, 2 saatte 160 km, 3 saatte 240 km, 4 saatte 320 km, 5 saatte 400 km yol alıyor. Bu duruma uygun doğru grafiğini çizerek doğrunun denklemini yazınız.

2. Bir evde sıcak su, şofben ve güneş enerjisi ile sağlanmaktadır. Aralık, ocak ve şubat aylarında sadece şofben kullanılmaktadır. Güneş enerjisi deposunda 60 L su olduğuna göre kış aylarında deponun durumunu gösteren grafiği çizerek doğrunun denklemini yazınız.

3. Bir taksinin taksimetresi açılış ücreti olarak 3 TL ile başlamakta ve ücret, her kilometrede 2 TL artmaktadır. Alınan yol ile ödenen ücret arasındaki ilişkinin denklemini yazınız. Bu durumla ilgili bir tablo oluşturarak taksinin hareketinden itibaren 6 km yol alana kadar ödenecek ücreti bulunuz. Tabloya göre denklemin grafiği çiziniz.

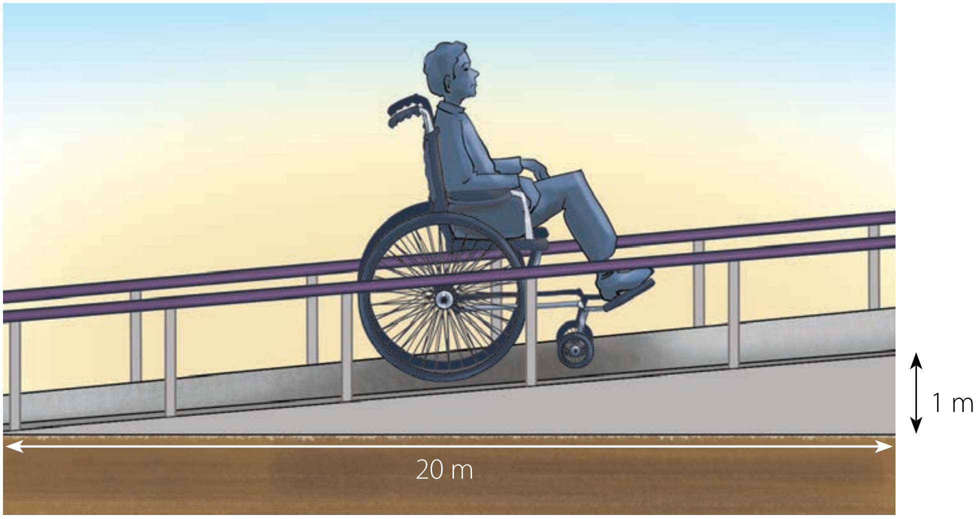
4. Yağız Türkçeyi etkili kullanan bir yazar olmak istiyor. Bunun için her gün 50 sayfa kitap okuyor. Yağız'ın bir haftada okuduğu sayfa sayısı ile ilgili aşağıdaki tabloyu doldurunuz. Tablodaki verileri gösteren doğru denklemini yazarak grafiğini çiziniz.

Gün	1	2	3	4	5	6	7
Sayfa							

4.1.6. Doğrunun Eğimi

Tüm ticari binaların ve kamu binalarının en az bir girişi, engelliler için kullanılabilir olmalıdır. Girişlerdeki eğimler, tekerlekli sandalye kullanıcıları ve bastonlu kişilerin rahat ve güvenli geçişini sağlayacak şekilde yapılmalıdır. Bunun için girişler, basamaksız olarak en fazla %5 eğimli olacak şekilde düzenlenmelidir.

http://webdosya.csb.gov.tr



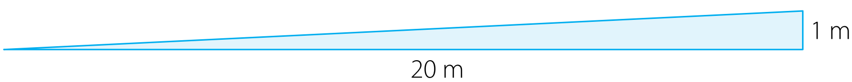
$$\frac{1}{20}$$

%5 eğim olması; rampanın yerden yüksekliğinin, rampanın yere bitişik kenarının uzunluğuna oranının $\frac{1}{20}$ olması demektir.

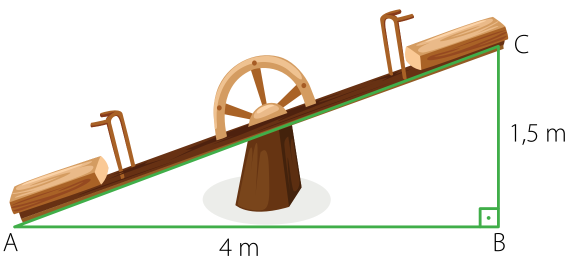
$$\frac{\text{Rampanın yerden yüksekliği}}{\text{Rampanın yere bitişik kenarının uzunluğu}} = \frac{1}{20}$$

Rampanın yüksekliği 1 m ise yere bitişik kenarının uzunluğunun 20 m olması gerekmektedir. Bu oran aynı zamanda %5'tir.

Bu durumu modelleyelim.



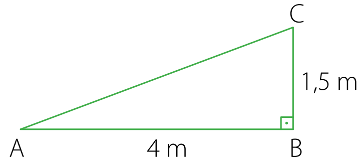
1. Örnek



Yukarıdaki tahterevallide [BC]'nın uzunluğu 1,5 m, [AB]'nın uzunluğu ise 4 m'dir. O hâlde bu tahterevallinin eğimini bulalım.

Çözüm

Model çizelim.



$$\text{Eğim} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1,5}{4} = \frac{15}{40} = \%37,5 \text{ olur.}$$

Bilgi Kutusu

Koordinat sisteminde bir doğrunun eğimi;

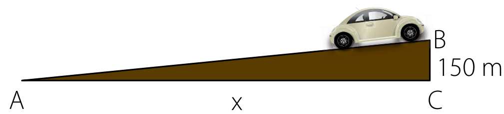
$$\frac{\textit{Düşey uzunluk}}{\textit{Yatay uzunluk}}$$

formülü ile bulunur.

Eğim, m harfi ile gösterilir.

2. Örnek

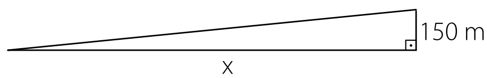
Yandaki araç, %10 çıkış eğimli bir yolda ilerliyor. Aracın hareket etmeye başladığı noktaya A, 150 m yüksekliğe ulaştığı noktaya kadar ise B diyelim. B noktasından aşağıya doğru A noktası seviyesine bir dik çizelim. Ulaştığımız noktaya C diyelim. Bu durumda A ile C arasındaki uzaklık kaç metre olur? Bulalım.



Çözüm

Model çizelim.

$\text{Eğim} = m = \frac{10}{100}$'dür.



Düşey uzunluk = 150 m Yatay uzunluk = x m'dir.

$$m = \frac{\text{Düşey uzunluk}}{\text{Yatay uzunluk}} = \frac{150}{x} \text{ olduğundan;}$$

$$\frac{150}{x} = \frac{10}{100} \text{ eşitliği vardır.}$$

$$x = 1500 \text{ m bulunur.}$$

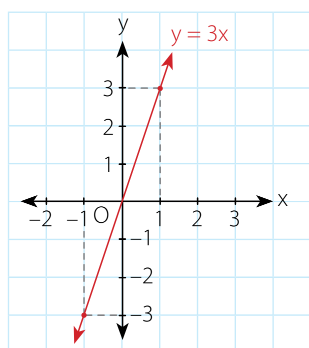
3. Örnek

y = 3x doğrusunun grafiğini çizip eğimini bulalım.

Çözüm

y = 3x doğrusunun grafiği orijinden geçer. x bağımsız değişkenine verilen değerlere bağlı olarak y bağımlı değişkenin aldığı değerleri bulalım.

x	y	(x, y)
–2	–6	(–2, –6)
–1	–3	(–1, –3)
0	0	(0, 0)
1	3	(1, 3)
2	6	(2, 6)



x bağımsız değişkeninin aldığı değerler 1'er artarken, y bağımsız değişkenin aldığı değerler 3'er artmıştır. O hâlde eğim;

$$m = \frac{\text{y eksenindeki değişim}}{\text{x eksenindeki değişim}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ bulunur.}$$

4. Örnek

Aşağıda verilen doğruların eğimlerini bulalım.

a) $y = 2x$ **b)** $y = -3x$ **c)** $4y = 5x$

Çözüm

a) $y = 2x$ doğrusunun eğimi $m = 2$'dir.

b) $y = -3x$ doğrusunun eğimi $m = -3$'tür.

c) $4y = 5x$ doğrusunun denklemini, $y = mx$ biçimine dönüştürelim.

$y = \frac{5}{4}x$ olur. O hâlde $m = \frac{5}{4}$ bulunur.

Bilgi Kutusu

$y = mx$ biçimindeki denklemlerin eğimi x'in katsayısıdır. m, eğimi gösterir.

Sıra Sizde

Aşağıdaki doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $y = -x$ **b)** $y = 4x$ **c)** $3x = 7y$ **ç)** $x = -y$

5. Örnek

$y = 3x - 6$ doğru denkleminin grafiğini çizelim ve eğimini bulalım.

Çözüm

Doğru grafiğinde her bir x değerine karşılık gelen bir y değeri vardır. Bunu bir tablo yaparak gösterelim.

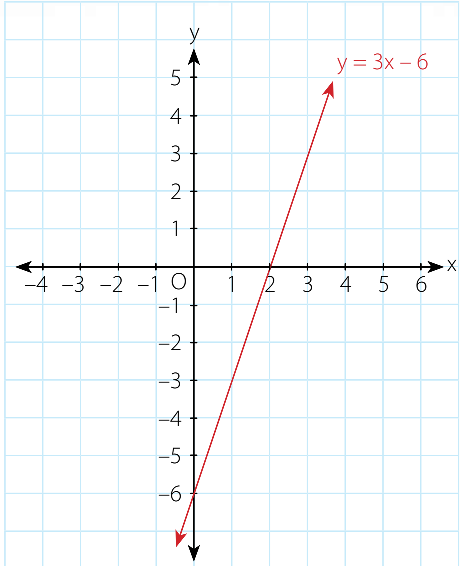
x	y	(x, y)
–1	–9	(–1, –9)
0	–6	(0, –6)
1	–3	(1, –3)
2	0	(2, 0)

x bağımsız değişkeninin aldığı değerler 1'er artarken y bağımlı değişkeninin aldığı değerler 3'er artmıştır.

Doğru denklemi, (0, –6) noktasında y eksenini kesmektedir. y ekseni üzerindeki noktaların x değeri 0'dır.

Doğru denklemi, (2, 0) noktasında x eksenini kesmektedir. x ekseni üzerindeki noktaların y değeri 0'dır.

Doğrunun eksenleri kestiği noktalardan yararlanarak grafiği çizelim.



$$m = \frac{\text{y eksenindeki değişim}}{\text{x eksenindeki değişim}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ bulunur.}$$

$y = 3x - 6$ doğrusunun eğimi, $m = 3$'tür.

Bilgi Kutusu

y = mx + n biçimindeki denklemlerin eğimi, x'in katsayısıdır. m, eğimi gösterir.

6. Örnek

$2y + x - 4 = 0$ doğrusunun grafiğini çizelim ve eğimini bulalım.

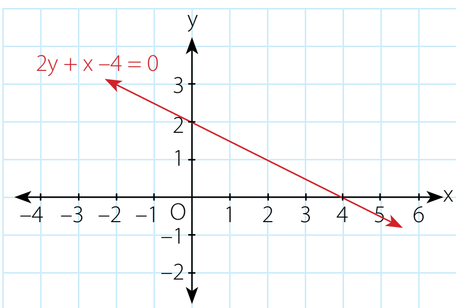
Çözüm

x'e değerler verelim.

x	y	(x, y)
–2	3	(–2, 3)
0	2	(0, 2)
2	1	(2, 1)
4	0	(4, 0)

x bağımsız değişkeninin aldığı değerler ikişer artarken y bağımlı değişkeninin aldığı değerler birer azalmaktadır.

Doğrunun eksenleri kestiği noktalardan yararlanarak grafiği çizelim.



$2y + x - 4 = 0$ doğrusunda y'yi çekelim.

$$2y + x - 4 = 0$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{-x + 4}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

olduğundan doğrunun eğimi $-\frac{1}{2}$'dir.

7. Örnek

Aşağıda verilen doğruların eğimlerini bulalım.

a) $3x - 2y + 5 = 0$ **b)** $x - y + 1 = 0$ **c)** $2y + 5x - 2 = 0$

Çözüm

$ax + by + c = 0$ denkleminde, $m = -\dfrac{a}{b}$ eşitliğinden yararlanalım.

a) $3x - 2y + 5 = 0$ denkleminde $a = 3$ ve $b = -2$'dir.

O hâlde eğim, $m = -\dfrac{3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

b) $x - y + 1 = 0$ denkleminde $a = 1$ ve $b = -1$'dir.

O hâlde eğim, $m = -\dfrac{1}{-1} = 1$ bulunur.

c) $2y + 5x - 2 = 0$ denkleminde $a = 5$ ve $b = 2$'dir.

O hâlde eğim, $m = -\dfrac{5}{2}$ bulunur.

Bilgi Kutusu

$b \neq 0$, a ve c'den en az biri sıfırdan farklı birer gerçek sayı olmak üzere $ax + by + c = 0$ doğrusunun eğimi, doğru denklemi;

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

hâline getirilerek $m = -\dfrac{a}{b}$ eşitliği ile bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $4x - 5y + 3 = 0$ **b)** $2x + y + 7 = 0$ **c)** $-3y - 5x + 6 = 0$

8. Örnek

$y = -x + 3$ ve $y = x + 3$ doğru denklemlerinin grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizelim ve eğimlerini bulalım.

Çözüm

Doğru grafiğinde her x değerine karşı bir y değeri vardır. Bunu tablo yaparak gösterelim.

$y = -x + 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

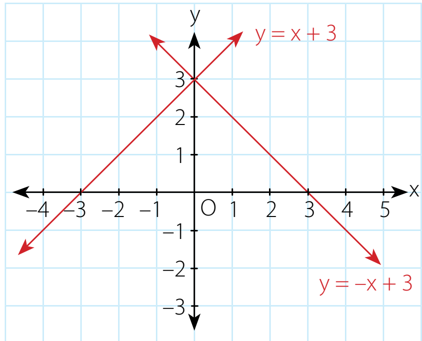
$y = x + 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
–3	0	(–3, 0)

$y = -x + 3$ doğru denklemi, (0, 3) noktasında y eksenini; (3, 0) noktasında ise x eksenini kesmektedir. Doğrunun eğimi, $m = -1$'dir.

$y = x + 3$ doğru denklemi, (0, 3) noktasında y eksenini; (–3, 0) noktasında ise x eksenini kesmektedir. Doğrunun eğimi, $m = 1$'dir.

Noktaları koordinat sisteminde işaretleyerek grafiği çizelim.



$y = x + 3$ doğrusunun eğimi pozitif ve grafiği sağa yatık,

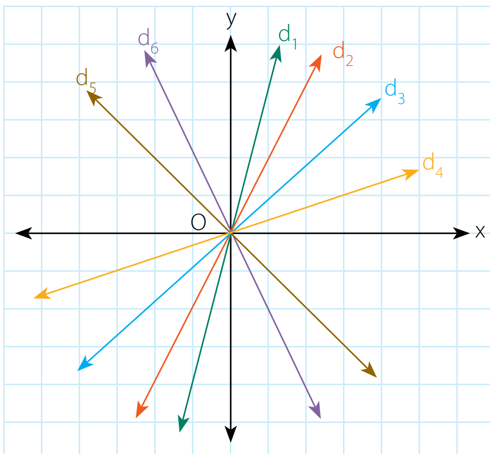
$y = -x + 3$ doğrusunun eğimi ise negatif ve grafiği sola yatıktır.

Bilgi Kutusu

Eğimin negatif olması, doğrunun grafiğinin sola yatık; pozitif olması ise sağa yatık olduğunu gösterir.

Etkinlik

- Aşağıdaki koordinat sisteminde verilen doğruları inceleyiniz.



Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

✓ Hangi doğruların eğimi negatiftir?

✓ Hangi doğruların eğimi pozitiftir?

9. Örnek

$y = x$, $y = 2x$ ve $y = 3x$ doğrularının grafiklerini aynı koordinat sisteminde gösterelim ve eğimlerini inceleyelim.

Çözüm

Bu doğruların grafiklerinin hepsi orijinden geçer.

y = x doğrusu için;

x = 1 ise y = 1'dir. O hâlde bu doğru için iki nokta (0, 0) ve (1, 1)'dir.

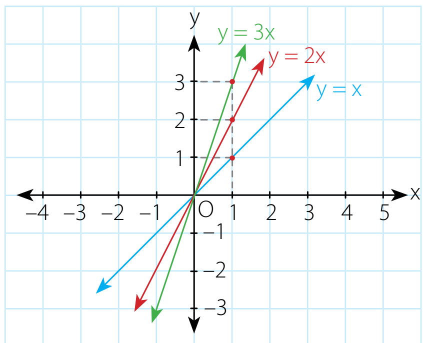
y = 2x doğrusu için;

x = 1 ise y = 2'dir. O hâlde bu doğru için iki nokta (0, 0) ve (1, 2)'dir.

y = 3x doğrusu için;

x = 1 ise y = 3'tür. O hâlde bu doğru için iki nokta (0, 0) ve (1, 3)'tür.

Bulduğumuz bu koordinatlara göre doğru grafiklerini çizelim.



y = 3x doğrusunun eğimi 3, y = 2x doğrusunun eğimi 2 ve y = x doğrusunun eğimi 1'dir.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen doğruların grafiklerini çizerek eğimlerini inceleyiniz.

a) $y = \frac{5}{2}x$ **b)** y = 4x **c)** y = 2x

10. Örnek

y – 5 = 0 ve y = –2 doğrularının grafiklerini çizelim ve eğimlerini bulalım.

Çözüm

y – 5 = 0 ise y = 5'tir.

y = 5 ve y = –2 doğrularının grafiklerini aynı koordinat sisteminde gösterelim.

Bilgi Kutusu

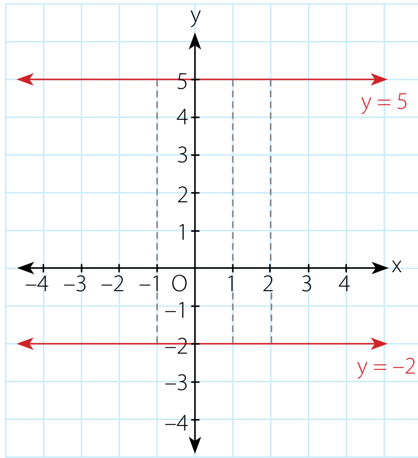
a, gerçek sayı olmak üzere $y = a$ şeklindeki yatay doğruların eğimleri 0'dır.

$y = 5$

x	y
–1	5
0	5
1	5
2	5

$y = -2$

x	y
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2



Her iki tabloda ve grafikte görüldüğü gibi x değerlerinin değişimine karşılık, y değerlerinde hiçbir değişiklik olmamıştır. O hâlde eğim 0'dır.

$y = 5$ ve $y = -2$ doğruları x eksenine paralel olduğundan eğim 0'dır.

Bilgi Kutusu

b, bir gerçek sayı olmak üzere $x = b$ şeklindeki dikey doğruların eğimi tanımsızdır.

11. Örnek

$x + 3 = 0$ ve $x = 1$ doğrularının grafiklerini çizelim ve eğimlerini bulalım.

Çözüm

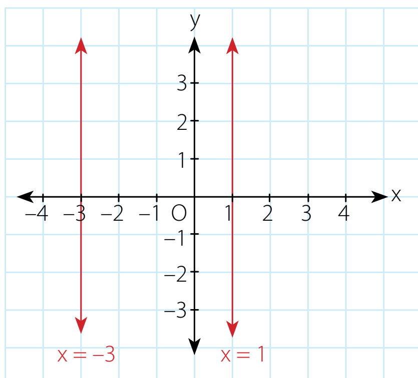
$x + 3 = 0$ ise $x = -3$'tür.

$x = -3$

x	y
–3	–1
–3	0
–3	1
–3	2

$x = 1$

x	y
1	–1
1	0
1	1
1	2



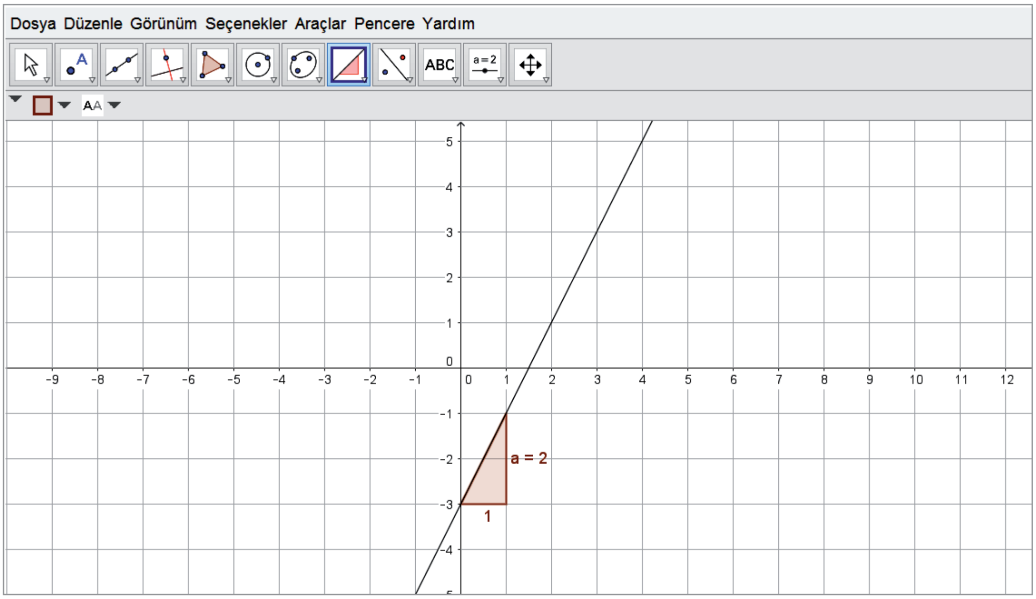
x değerlerindeki değişim 0'dır.

$x = -3$ ve $x = 1$ doğruları x eksenine dik olduğundan eğimleri tanımsızdır.

Dinamik Geometri Yazılımı ile Grafik Çizip Eğim Bulma

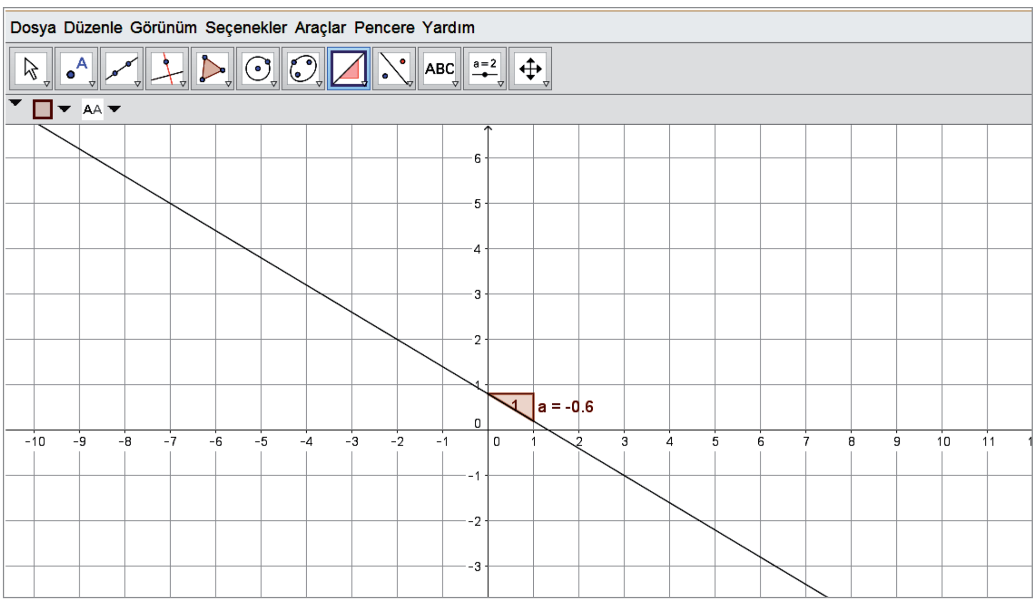
Bir dinamik geometri yazılımından yararlanarak doğruların grafiklerini çizip eğimlerini bulalım.

1. $y = 2x - 3$ doğrusu için "Giriş" bölümüne $y = 2x - 3$ yazıp "enter"a basalım. Ekranda doğru çizilecektir.



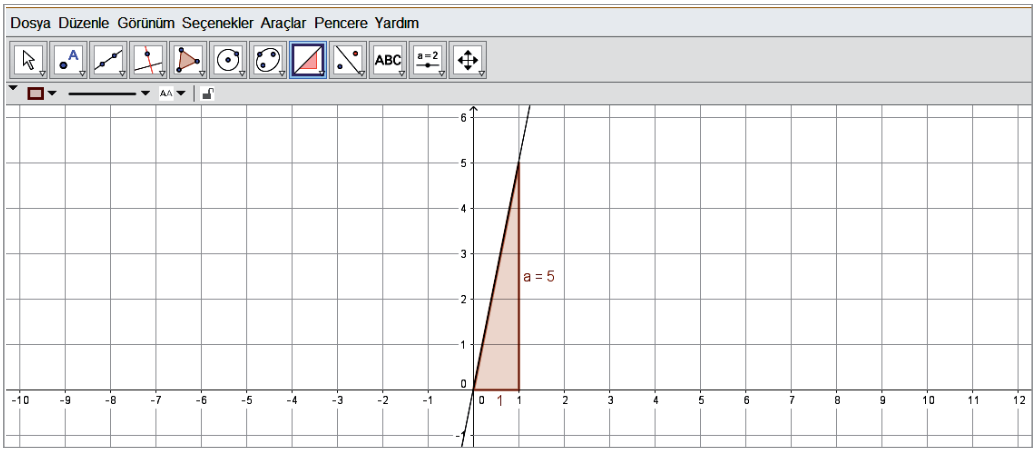
"Eğim" sekmesine tıkladığımızda ekranda görünen a = 2 doğrunun eğimini verir.

2. $-3x - 5y + 4 = 0$ doğrusu için "Giriş" bölümüne $-3x - 5y + 4 = 0$ yazıp "enter"a basalım. Ekranda doğru çizilecektir.



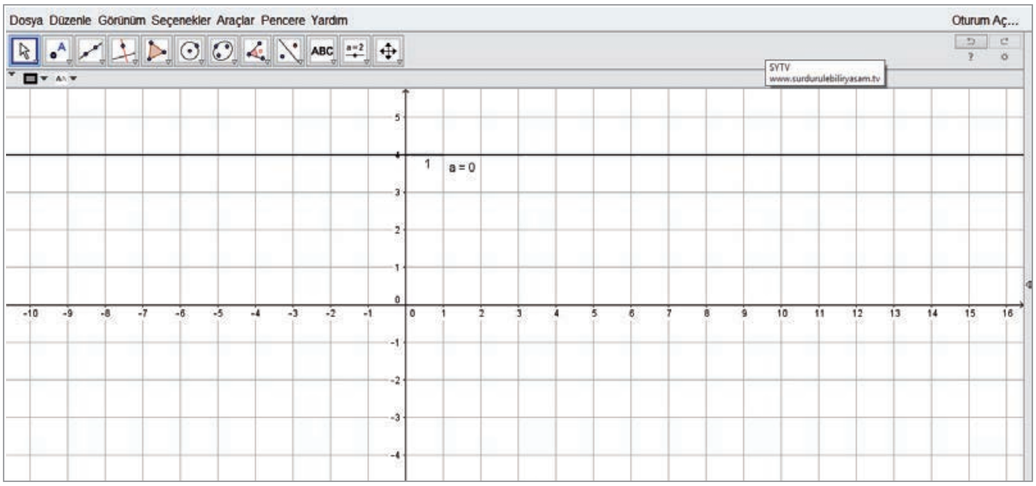
"Eğim" sekmesine tıkladığımızda ekranda görünen a = -0,6 doğrunun eğimini verir.

3. y = 5x doğrusu için eğimi bulalım.



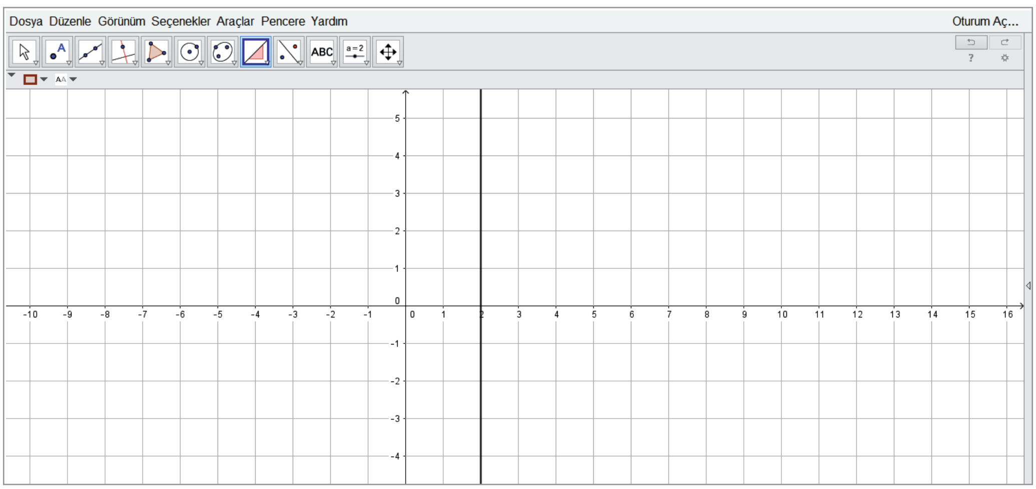
"Eğim" sekmesine tıkladığımızda ekranda görünen a = 5 doğrunun eğimini verir.

4. y = 4 doğrusu için eğimi bulalım.



"Eğim" sekmesine tıkladığımızda ekranda görünen a = 0 doğrunun eğimini verir.

5. x = 2 doğrusu için eğimi bulalım.



"Eğim" sekmesine tıkladığımızda ekranda hiçbir değer görülmemektedir. Çünkü doğrunun eğimi tanımsızdır.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

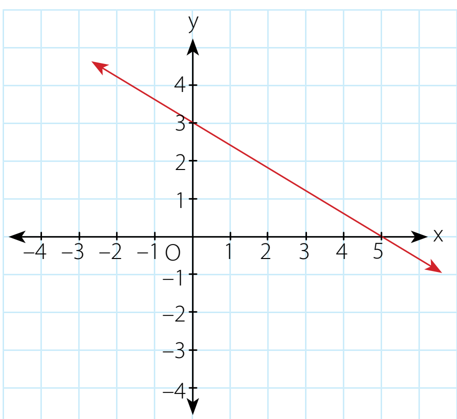
1. Aşağıda verilen doğru denklemlerinin eğimlerini bulunuz.

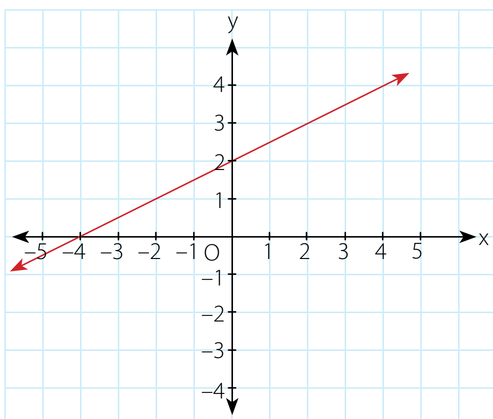
Doğru Denklemi	Eğim
$y = 3x$	
$y = 5$	
$y = -2x + 5$	
$2x - 5y - 6 = 0$	
$3y + 4x = 5$	
$x = -7$	

2. Aşağıda verilen eğim değerlerine göre doğru grafiklerinin sağa mı yoksa sola mı yatık olduklarını belirleyiniz.

Eğim	Sola Yatık Grafik	Sağa Yatık Grafik
-5		
6		
$\frac{2}{3}$		
$\frac{-4}{5}$		

3. Aşağıda verilen grafiklere göre eğimi belirleyiniz.





4. Yandaki yolun eğimi %5'tir. Yolun yerden yüksekliğini bulunuz.

4.2. Bölüm Eşitsizlikler

Terimler veya Kavramlar

- *Büyük veya eşit*
- *Küçük veya eşit*
- *Eşitsizlik*

Semboller

- ≥
- ≤

Gıdalar, farklı nem içeriğine sahip ortamlarda depolandığında kendi su aktivitelerine bağlı olarak nem çeker veya su kaybeder. Gıdanın su aktivitesi değeri, çevrenin neminden düşük ise ürün nem çeker, tersi durumda su kaybeder. Belirli bir sıcaklıkta %80 nemli bir atmosferde tutulan gıda maddesinin denge nemi %20'dir. Gıdanın nemi %20'den düşükse (kurutulmuş gıda) nem çeker ve nem oranı %20'ye ulaşır. Gıdanın nemi %20'den yüksekse kendisini çevreleyen havaya nem vererek nemi %20'ye düşer. Su kaybeden gıda kuruyarak, su alan gıda nemlenerek (küflenme) bozulur. Bu durum ile ilgili bir eşitsizlik yazılabilir. Nem < %20 ise gıda kurumuştur. Ya da nem > %20 ise gıda küflenmiştir. Gerçek yaşantı durumlarında bu tür eşitsizliklerle sıklıkla karşılaşılmaktadır.

Matematikte "küçüktür", "büyüktür", "küçük ya da eşittir" ve "büyük ya da eşittir" ifadeleri kullanılarak cebirsel ifadeler yazılabilir.

http://cv.ankara.edu.tr

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

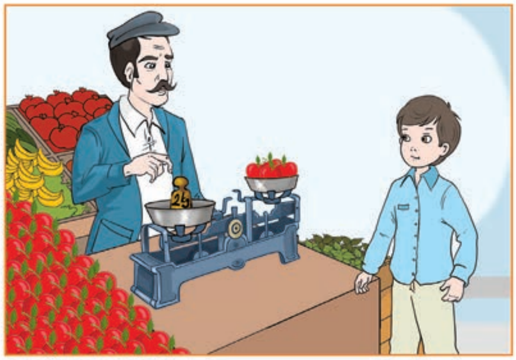
- *Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik içeren günlük yaşam durumlarına uygun matematik cümleleri yazma*
- *Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösterme*
- *Birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikleri çözme*

4.2.1. Eşitsizlik Yazma

Mehmet, manav Mustafa'dan 2 kg elma istiyor.

Manav, teraziye koyduğu elmaları tartıyor. Terazinin ağırlık konan kefesi ağır basıyor. Yani elmaların kütlesi 2 kg'dan az geliyor.

Elmaların kütlesi < 2 kg

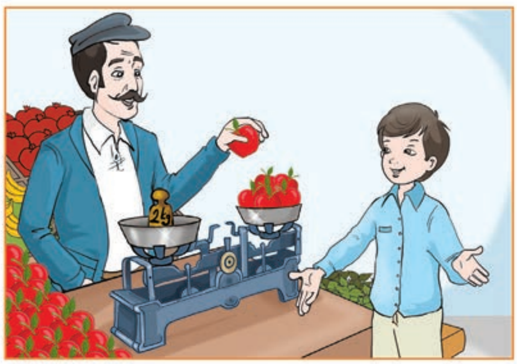


Manav, birkaç elma daha ekliyor. Bu kez elmaların olduğu kefe ağır basıyor. Elmaların kütlesi 2 kg'dan fazla geliyor.

Elmaların kütlesi > 2 kg

Manav, bir elmayı geri aldığında elmaların olduğu kefe ile ağırlıkların olduğu kefe dengede kalıyor. Elmalar tam 2 kg geliyor.

Elmaların kütlesi = 2 kg



1. Örnek

Bir fındık içinin boyu 5 mm'den küçük ise o fındık, pikolo adını alır. Fındığın pikolo olması için boyunun ne kadar olması gerektiği ile ilgili durumu cebirsel olarak yazalım.

Çözüm

Fındık içinin boyuna "f" dersek, fındığın pikolo olması için f < 5 mm olması gerekir.

Bilgi Kutusu

a ve b gerçek sayı olmak üzere a ile b arasında üç durum söz konusudur.

a, b'den küçüktür. $a < b$

a, b'den büyüktür. $a > b$

a, b'ye eşittir. $a = b$

Bilgi Kutusu

x, bir gerçek sayı olmak üzere;

$x \leq 3$, x'in 3'e eşit veya 3'ten küçük olabileceğini gösterir.

$x \geq 3$, x'in 3'e eşit veya 3'ten büyük olabileceğini gösterir.

Etkinlik

- Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere gelmesi gereken sembolleri belirleyerek uygun semboller ile eşleştiriniz.

x: sayı

–3'ten küçük sayılar	x ..... –3	$\leq$
6'dan büyük sayılar	x 6	
7'ye eşit ve 7'den küçük sayılar	x 7	
0' a eşit ve 0'dan küçük sayılar	x 0	$\geq$
Pozitif tam sayılar	x 0	
–1'den büyük ve –1'e eşit sayılar	x ..... –1	
2'den küçük sayılar	2 x	$<$
15'e eşit ve 15'ten büyük sayılar	15 x	
–6'dan büyük sayılar	–6 x	$>$
0'a eşit ve pozitif tam sayılar	0 x	

✓ Eşleştirmeleri yaparken nelere dikkat ettiniz? Açıklayınız.

2. Örnek

Kıyıya 12 deniz milinden (yaklaşık 22,224 km) daha az uzaklıkta bulunan gemilerden denize yemek artığı boşaltılamaz.

Bir gemiden, denize yemek artığı boşaltılabilmesi için geminin kıyıdan ne kadar uzaklıkta olması gerekir? Bu durumu cebirsel olarak yazalım.

http://members.comu.edu.tr

Çözüm

Geminin aldığı yola "g" diyelim. $g > 12$ deniz mili ise yemek artıkları denize boşaltılabilir.

3. Örnek

Yaşı 18'den küçük olanlar, anne babalarının izni olmadan bir GSM hattı alamazlar. GSM hattı alabilmek için bir kişinin yaşı ne olmalıdır? Bu durumu cebirsel olarak yazalım.

Çözüm

Kendi adınıza bir GSM operatörü almak isterseniz yaşınızın 18'e eşit ya da 18'den büyük olması gerekir. Yaşınıza "x" dersek $x \geq 18$ olması gerekir.

4. Örnek

"25 ya da 25'ten küçük sayılar" ifadesini cebirsel ifade olarak yazalım.

Çözüm

Sayı y olmak üzere;

$y \leq 25$ ifadesi, 25 ya da 25'ten küçük sayıları gösterir.

Bilgi Kutusu

İçinde <, > ≤, ≥ sembolleri kullanılarak yazılan cebirsel ifadelere ***eşitsizlik*** *denir.*

5. Örnek

Bir iş yeri, İnternet üzerinden yazıcı kartuşunun tanesini 15 TL'ye satıyor. Ayrıca her gönderim için 8 TL kargo ücreti alıyor. Bu siteden alışveriş yapacak olan Tuğba'nın 75 TL'si vardır. Tuğba, bu yazıcı kartuşlarından en çok kaç adet sipariş verebilir?

Yukarıdaki probleme ait cebirsel ifadeyi yazalım.

Çözüm

x: Alınacak yazıcı kartuşu sayısı olsun.

Bir adet kartuş 15 TL olduğundan alınacak kartuşa ödenecek para 15x olur. Kargo ücreti 8 TL olduğundan ödenecek toplam para $15x + 8$ olur.

Tuğba'nın 75 TL'si olduğundan ödenecek para 75 TL ya da 75 TL'den az olmalıdır. Bu durumu uygun eşitsizlik sembolü kullanarak gösterelim.

$15x + 8 \leq 75$ olur.

6. Örnek

Aşağıdaki ifadeleri cebirsel olarak yazalım.

a) 3 katının 7 eksiği 6'dan büyük sayılar

b) 2 eksiğinin üçte biri negatif olan sayılar

c) 4 katının 1 fazlası 5 veya 5'ten büyük olan sayılar

ç) 5 fazlasının 4 katı sıfır veya sıfırdan büyük olan sayılar

d) 8 eksiğinin yarısı 2 veya 2'den küçük olan sayılar

Çözüm

İfadeleri cebirsel olarak ve büyüklük küçüklük ifadelerini dikkate alarak eşitsizlik biçiminde yazalım.

a) t: sayı olmak üzere;

Sayının 3 katının 7 eksiği: $3t - 7$ olur. Bu ifade 6'dan büyük ise $3t - 7 > 6$ biçiminde yazılır.

b) x: sayı olmak üzere;

Sayının 2 eksiğinin üçte biri: $\frac{x-2}{3}$ olur. Bu ifade negatif ise sıfırdan küçüktür. O hâlde; $\frac{x-2}{3} < 0$ biçiminde yazılır.

c) k: sayı olmak üzere;

Sayının 4 katının 1 fazlası: $4k + 1$ olur. Bu ifade 5 veya 5'ten büyük ise $4k + 1 \geq 5$ biçiminde yazılır.

ç) d: sayı olmak üzere;

Sayının 5 fazlasının 4 katı: $4(d + 5)$ olur. Bu ifade sıfır veya sıfırdan büyük ise $4(d + 5) \geq 0$ biçiminde yazılır.

d) m: sayı olmak üzere;

Sayının 8 eksiğinin yarısı $\frac{m-8}{2}$ olur. Bu ifade 2 veya 2'den küçük ise $\frac{m-8}{2} \leq 2$ biçiminde yazılır.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki ifadelerden eşitsizliği doğru yazılanların başındaki kutucuğa "D", yanlış yazılanların başındaki kutucuğa "Y" yazınız.

- ☐ Sayı x olmak üzere 5'ten küçük sayılar: $x < 5$
- ☐ Sayı d olmak üzere –2'den büyük sayılar: $-2 > d$
- ☐ Sayı b olmak üzere –4'ten küçük sayılar: $-4 > b$
- ☐ Sayı k olmak üzere sıfır ya da pozitif sayılar: $k \geq 0$

2. Aşağıda verilen ifadelere uygun eşitsizlikleri boş bırakılan yerlere yazınız.

- Sayı a olmak üzere 2 katının 5 eksiği 3'e eşit ya da 3'ten küçük olan sayılar: ....
- Sayı t olmak üzere 6 fazlasının yarısı negatif olan sayılar: ....
- Sayı s olmak üzere 7 eksiğinin 3 katı –2'ye eşit ya da –2'den büyük olan sayılar: ....
- Sayı x olmak üzere üçte birinin 8 eksiği 5'ten küçük sayılar: ....

3. Aşağıdaki durumlara uygun eşitsizlikleri yazınız.

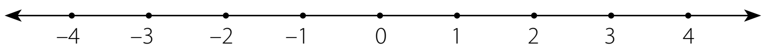
a) Büyükşehir belediyesi kurulabilmesi için nüfus en az 750 000 olmalıdır.

b) Yetişkin bir insan günde en az 2 litre su içmelidir.

c) Bir dersten en az 10 öğrencinin müracaatı ile kurs açılabilir.

ç) Şehirler arası araç kullanan şoförler sürekli olarak en fazla 4 saat araç kullanabilir.

4.2.2. Eşitsizlikleri Sayı Doğrusunda Gösterme



Sayı doğrusunda başlangıç “0” noktası olmak üzere sıfırın solunda negatif sayılar, sağında ise pozitif sayılar vardır.

x negatif bir gerçek sayı olmak üzere $x < 0$'dır.

y pozitif bir gerçek sayı olmak üzere $y > 0$'dır.

Bilgi Kutusu

Sayı doğrusu üzerindeki her bir nokta, bir gerçek sayıya karşılık gelir.

1. Örnek

2'den büyük tam sayıları yazalım.

Çözüm

2'den büyük tam sayılar;

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...'dır.

2. Örnek

0'dan küçük tam sayıları yazalım.

Çözüm

0'dan küçük tam sayılar;

–1, –2, –3, –4, –5, –6, ...'dır.

3. Örnek

6'dan küçük gerçek sayıları cebirsel olarak gösterelim.

Çözüm

6'dan küçük sayılar x olsun. $x < 6$'dır.

4. Örnek

Aşağıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösterelim.

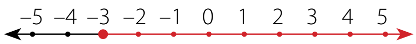
a) $x \geq -3$ b) $y \leq 5$ c) $0 \leq t$ ç) $-1 \geq k$

Bilgi Kutusu

$x \leq a$ ya da $x \geq a$ eşitsizliklerinde "a" sayısı çözüme dâhildir. Bu eşitsizlikler sayı doğrusunda gösterilirken a noktası dâhil edilip içi dolu yuvarlak (•) yapılır.

Çözüm

a) $x \geq -3$

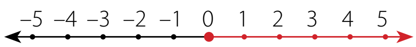


−3 veya −3'ten büyük gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

b) $y \leq 5$

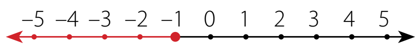
5 veya 5'ten küçük sayılar eşitsizliği sağlar.

c) $0 \leq t$



0 veya 0'dan büyük gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

ç) $-1 \geq k$



−1 veya −1'den küçük gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

Sıra Sizde

Aşağıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösteriniz.

a) $x \geq 1$ b) $y \leq -3$ c) $-4 \leq t$ ç) $0 \geq k$

5. Örnek

Aşağıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösterelim.

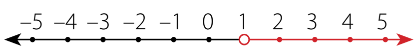
a) $x > 1$ b) $y < -3$ c) $-1 < t$ ç) $6 > k$

Bilgi Kutusu

$x < a$ ya da $x > a$ eşitsizliklerinde "a" sayısı çözüme dâhil değildir. Bu eşitsizlikler sayı doğrusunda gösterilirken a noktası dâhil edilmeyip içi boş yuvarlak (○) yapılır.

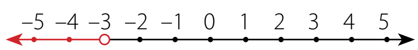
Çözüm

a) $x > 1$



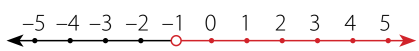
1'den büyük gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

b) $y < -3$



−3'ten küçük gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

c) $-1 < t$



−1'den büyük gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

ç) $6 > k$

6'dan küçük gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

Sıra Sizde

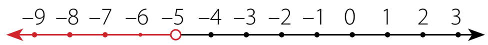
Aşağıdaki eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösteriniz.

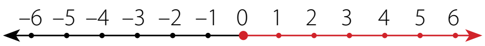
a) $x > -7$ b) $y < 8$ c) $4 < t$ ç) $-5 > k$

6. Örnek

Aşağıdaki sayı doğrularında gösterilen eşitsizlikleri cebirsel olarak yazalım.

a) 

b) 

c) 

ç) 

Çözüm

a) Sayı doğrusunda 4 veya 4'ten küçük gerçek sayılar işaretlenmiştir. O hâlde $x \leq 4$ olur.

b) Sayı doğrusunda –5'ten küçük gerçek sayılar işaretlenmiştir. O hâlde $x < -5$ olur.

c) Sayı doğrusunda 0 veya 0'dan büyük gerçek sayılar işaretlenmiştir. O hâlde $0 \leq x$ olur.

ç) Sayı doğrusunda –1'den büyük gerçek sayılar işaretlenmiştir. O hâlde $-1 < x$ olur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki sözel ifadelerde istenenleri cebirsel olarak yazınız ve sayı doğrusunda gösteriniz.
   a) 3'ten büyük gerçek sayılar
   b) 4'e eşit veya 4'ten küçük gerçek sayılar
   c) –5'ten büyük gerçek sayılar

2. Aşağıda verilen eşitsizlikleri sayı doğrusunda gösteriniz.

   a) $x > 6$ b) $9 > x$ c) $7 \geq x$ ç) $x \geq 5$

3. Aşağıda verilen cebirsel ifadeler için sözel ifadeler yazınız.

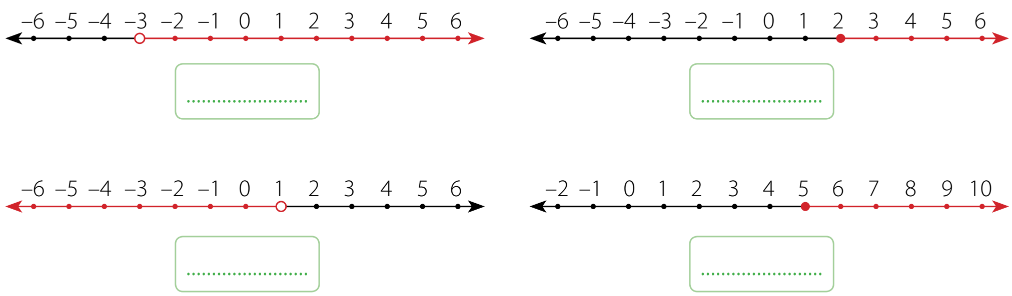
   a) $x < 8$: ....

   b) $x > 1$: ....

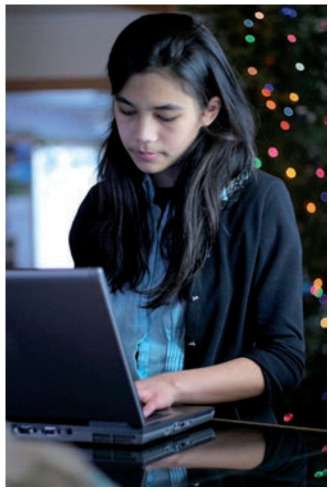
   c) $x \leq 10$: ....

   ç) $x \geq -7$: ....

4. Aşağıdaki sayı doğrularında gösterilen eşitsizlikleri cebirsel olarak yazınız.



4.2.3. Eşitsizlikleri Çözme



İlke, hazırladığı İtalyanca ödevi taşınabilir belleğe yükleyerek sunum yapacaktır. Ödevini kaydettiği dosyanın kapladığı alanın yarısının 16 megabayt (MB) eksiği 50 MB'den küçüktür. İlke'nin elindeki taşınabilir bellekte 150 MB boş alan bulunduğuna göre ödevi, taşınabilir belleğe sığar mı? Bulalım.

Ödevin bulunduğu dosyanın kapladığı alan x olsun. Bu durumun cebirsel ifadesi;

$\frac{x}{2} - 16 < 50$ olur.

Dosyanın kapladığı alanın yarısının 16 MB eksiği 50 MB'den küçük ise dosyanın kapladığı alanın yarısı $50 + 16 = 66$ MB'den küçüktür. O hâlde;

$\frac{x}{2} < 66$ MB olur.

Dosyanın kapladığı alanın yarısı 66 MB'den küçükse dosyanın kapladığı alan;

$66 \cdot 2 = 132$ MB'den küçüktür.

O hâlde $x < 132$ MB olur.

Bu durumda ödevin bulunduğu dosya taşınabilir belleğin boş alanına sığar.

Yukarıdaki işlemleri matematiksel olarak da yapabiliriz. Bununla ilgili kuralları işlem yaparak geliştirebiliriz.

Aşağıda verilen eşitsizliklerde istenen işlemleri yapalım.

a) $-9 < 3$ **b)** $2 \leq 5$ **c)** $-5 > -8$

⇨ Eşitsizliğin her iki tarafına 6 ekleyelim.

a) $-9 + 6 < 3 + 6$ **b)** $2 + 6 \leq 5 + 6$ **c)** $-5 + 6 > -8 + 6$

$-3 < 9$ $8 \leq 11$ $1 > -2$

➪ Eşitsizliğin her iki tarafından 8'i çıkaralım.

a) $-9 - 8 < 3 - 8$ $\quad$ $-17 < -5$

b) $2 - 8 \leq 5 - 8$ $\quad$ $-6 \leq -3$

c) $-5 - 8 > -8 - 8$ $\quad$ $-13 > -16$

➪ Eşitsizliğin her iki tarafını 3 ile çarpalım.

a) $-9 \cdot 3 < 3 \cdot 3$ $\quad$ $-27 < 9$

b) $2 \cdot 3 \leq 5 \cdot 3$ $\quad$ $6 \leq 15$

c) $-5 \cdot 3 > -8 \cdot 3$ $\quad$ $-15 > -24$

➪ Eşitsizliğin her iki tarafını –3 ile çarpalım.

a) $-9 < 3$ $\quad$ $-9 \cdot (-3) > 3 \cdot (-3)$ $\quad$ $27 > -9$

b) $2 \leq 5$ $\quad$ $2 \cdot (-3) \geq 5 \cdot (-3)$ $\quad$ $-6 \geq -15$

c) $-5 > -8$ $\quad$ $-5 \cdot (-3) < -8 \cdot (-3)$ $\quad$ $15 < 24$

➪ Eşitsizliğin her iki tarafını 2'ye bölelim.

a) $\frac{-9}{2} < \frac{3}{2}$ $\qquad$ b) $\frac{2}{2} \leq \frac{5}{2}$ $\qquad$ c) $\frac{-5}{2} > \frac{-8}{2}$

➪ Eşitsizliğin her iki tarafını –2'ye bölelim.

a) $-9 < 3$ $\quad$ $\frac{-9}{-2} > \frac{3}{-2}$ $\quad$ $\frac{9}{2} > \frac{-3}{2}$

b) $2 \leq 5$ $\quad$ $\frac{2}{-2} \geq \frac{5}{-2}$ $\quad$ $\frac{-2}{2} \geq \frac{-5}{2}$

c) $-5 > -8$ $\quad$ $\frac{-5}{-2} < \frac{-8}{-2}$ $\quad$ $\frac{5}{2} < \frac{8}{2}$

Bilgi Kutusu

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı sayı ile toplanabilir ya da her iki tarafından aynı sayı çıkarılabilir. Bu durumda eşitsizlik yön değiştirmez.

a, b, c gerçek sayılar olmak üzere;

$a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$ olur.

Bilgi Kutusu

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif sayı ile çarpılır veya her iki taraf aynı pozitif sayıya bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez.

a, b gerçek sayılar; c, pozitif gerçek sayı olmak üzere;

$a \leq b$ ise $a \cdot c \leq b \cdot c$ olur.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif sayı ile çarpılır veya aynı negatif sayıya bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.

a, b gerçek sayılar; c, negatif gerçek sayı olmak üzere;

$a \leq b$ ise $a \cdot c \geq b \cdot c$ olur.

1. Örnek

Aşağıdaki eşitsizlikleri çözerek çözümleri sağlayan gerçek sayıları sayı doğrusunda gösterelim.

a) $x - 5 < 0$ $\qquad$ b) $a + 1 < 3$ $\qquad$ c) $k + 8 > 0$ $\qquad$ ç) $4 + d > -2$

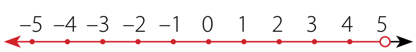
Çözüm

Eşitsizlikleri, yukarıda belirtilen özelliklerinden yararlanarak çözelim. Değişkeni eşitsizliğin bir tarafında yalnız bırakalım.

a) $x - 5 < 0$ (Eşitsizliğin her iki tarafına 5 ekledik.)

$x - 5 + 5 < 0 + 5$

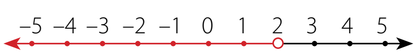
$x < 5$ bulunur.



b) $a + 1 < 3$ (Eşitsizliğin her iki tarafına –1 ekledik.)

$a + 1 - 1 < 3 - 1$

$a < 2$ bulunur.



c) $k + 8 > 0$ (Eşitsizliğin her iki tarafına –8 ekledik.)

$k + 8 - 8 > 0 - 8$

$k > -8$ bulunur.

ç) $4 + d > -2$ (Eşitsizliğin her iki tarafına –4 ekledik.)

$4 - 4 + d > -2 - 4$

$d > -6$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki eşitsizlikleri çözerek çözümleri sağlayan gerçek sayıları sayı doğrusunda gösteriniz.

a) $x + 5 < 2$ b) $3 + t > 4$ c) $k - 3 < 0$ ç) $1 + b < 6$

2. Örnek

Aşağıdaki denklem ve eşitsizlikleri çözerek çözüm kümesini sayı doğrusunda gösterelim.

a) $3x - 4 = 8$ b) $3x - 4 < 8$ c) $3x - 4 \geq 8$

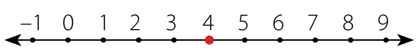
Çözüm

a) $3x - 4 = 8$

$3x = 8 + 4$

$3x = 12$

$x = 4$

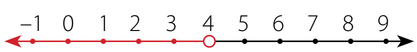


b) $3x - 4 < 8$

$3x < 8 + 4$

$3x < 12$

$x < 4$



c) $3x - 4 \geq 8$

$3x \geq 8 + 4$

$3x \geq 12$

$x \geq 4$

Üç çözümde de görüldüğü gibi çözüm biçimleri aynıdır. Yani eşitsizlikleri çözerken denklem çözer gibi çözebiliriz. Ancak eşitsizliğin her iki tarafını negatif bir sayı ile çarpar ya da bölerken eşitsizliğin yön değiştirdiğine dikkat etmeliyiz.

3. Örnek

Aşağıda verilen eşitsizlikleri çözelim.

a) $2x - 7 < 5$ **b)** $5 - 3x \geq -6$ **c)** $-2x - 7 > 13$

Çözüm

a) $2x - 7 < 5$

$$2x - 7 + 7 < 5 + 7$$

$$2x < 12$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{12}{2}$$

$x < 6$ bulunur.

b) $5 - 3x \geq -6$

$$-5 + 5 - 3x \geq -6 - 5$$

$$-3x \geq -11$$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-11}{-3}$$

(Eşitsizliğin her iki tarafını –3'e böldük. Negatif sayı ile böldüğümüz için eşitsizlik yön değiştirdi.)

$x \leq \frac{11}{3}$ bulunur.

c) $-2x - 7 > 13$

$$-2x - 7 + 7 > 13 + 7$$

$$-2x > 20$$

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{20}{-2}$$

(Eşitsizliğin her iki tarafını –2'ye böldük. Negatif sayı ile böldüğümüz için eşitsizlik yön değiştirdi.)

$x < -10$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen eşitsizlikleri çözünüz.

a) $3x - 5 < -9$ **b)** $4 - 2x \geq 7$ **c)** $-4x - 12 > 12$ **ç)** $3x - 7 \leq -4$

d) $2x - 4 < 0$ **e)** $4 - 6x \geq 7$ **f)** $\frac{2 - 3x}{2} < 4$ **g)** $\frac{x + 3}{2} \leq -4$

4. Örnek

Kitabımızın 189. sayfasındaki 5. örnekte verilen problemi çözelim.

Bir iş yeri İnternet üzerinden yazıcı kartuşunun tanesini 15 TL'ye satıyor. Ayrıca her gönderim için 8 TL kargo ücreti alıyor. Bu siteden alışveriş yapacak olan Tuğba'nın 75 TL'si vardır. Tuğba, bu yazıcı kartuşlarından en çok kaç adet sipariş verebilir?

Çözüm

Probleme ait eşitsizliğin "$15x + 8 \leq 75$" olduğunu daha önce yazmıştık. Şimdi bu eşitsizliği çözelim.

$15x + 8 \leq 75$

$15x \leq 75 - 8$

$15x \leq 67$

$\frac{15x}{15} \leq \frac{67}{15}$

$x \leq 4,4\overline{6}$ ise x'in alabileceği tam sayı değerleri 4 veya 4'ten küçük sayılardır. O hâlde, Tuğba en çok 4 tane kartuş alabilir.

5. Örnek

Kitabımızın 189. sayfasındaki 6. örnekte yazılan eşitsizlikleri sağlayan değerleri bularak sayı doğrusunda gösterelim.

a) 3 katının 7 eksiği 6'dan büyük sayılar

b) 2 eksiğinin üçte biri negatif olan sayılar

c) 4 katının 1 fazlası 5 veya 5'ten büyük olan sayılar

ç) 5 fazlasının 4 katı sıfır veya pozitif sayılar

d) 8 eksiğinin yarısı 2 veya 2'den küçük olan sayılar

Çözüm

Yazılan eşitsizlikleri çözelim. Eşitsizlikleri çözerken birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümünde kullandığımız yöntemleri kullanalım. Eşitsizliği, negatif bir sayıya bölerken ya da negatif bir sayıyla çarparken dikkat edelim.

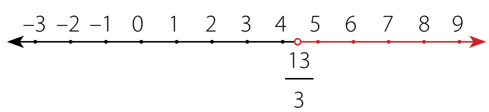
a) $3t - 7 > 6$

$3t > 7 + 6$

$3t > 13$

$\frac{3t}{3} > \frac{13}{3}$

$t > \frac{13}{3}$ bulunur.

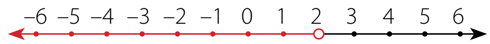


b) $\dfrac{x-2}{3} < 0$

$3 \cdot \dfrac{x-2}{3} < 0 \cdot 3$

$x - 2 < 0$

$x < 2$ bulunur.

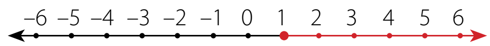


c) $4k + 1 \geq 5$

$4k \geq 5 - 1$

$4k \geq 4$

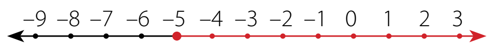
$k \geq 1$ bulunur.



ç) $4(d + 5) \geq 0$

$d + 5 \geq 0$

$d \geq -5$ bulunur.



d) $\dfrac{m-8}{2} \leq 2$ bulunur.

$m - 8 \leq 4$

$m \leq 12$ bulunur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan sayı değerlerini bularak sayı doğrusunda gösteriniz.

a) $2x - 6 < 3$ b) $5 - 3x > 0$ c) $5x + 12 \leq -10$ ç) $9 + 3x \geq -3$

6. Örnek

Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan x değerlerini bulalım.

a) $2(4 - 3x) < 14$ b) $x + 9 - 3x > 6$ c) $5 - 4x \geq x - 9$

Çözüm

a) $2(4 - 3x) < 14$

$8 - 6x < 14$

$-6x < 14 - 8$

$-6x < 6$

$\dfrac{-6x}{-6} > \dfrac{6}{-6}$

$x > -1$ –1'den büyük tüm gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

b) $x + 9 - 3x > 6$

$$-2x > -9 + 6$$

$$-2x > -3$$

$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-3}{-2}$$

$x < \frac{3}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$'den küçük tüm gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

c) $5 - 4x \geq x - 9$

$$-4x - x \geq -9 - 5$$

$$-5x \geq -14$$

$$\frac{-5x}{-5} \leq \frac{-14}{-5}$$

$x \leq \frac{14}{5}$ $\quad \frac{14}{5}$ ya da $\frac{14}{5}$'ten küçük tüm gerçek sayılar bu eşitsizliği sağlar.

7. Örnek

Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan x değerlerini bulalım.

a) $2x - 2(x + 4) < 5$ b) $x - 6 > x + 4$

Çözüm

a) $2x - 2(x + 4) < 5$

$$2x - 2x - 8 < 5$$

$-8 < 5$ $\quad -8$, 5'ten küçüktür. O hâlde bu eşitsizliği bütün gerçek sayılar sağlar.

b) $x - 6 > x + 4$

$$x - x > 4 + 6$$

$0 > 10$ $\quad$ 0, 10'dan büyük değildir. O hâlde bu eşitsizliği hiçbir gerçek sayı sağlamaz.

Sıra Sizde

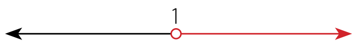
Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan x değerlerini bulunuz.

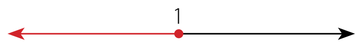
a) $3x - 6 < 3x + 9$ b) $4x - 2(2x - 3) > 10$

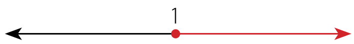
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

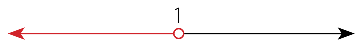
1. Biri diğerinin 2 katı olan iki çift sayının toplamı 42'den küçük ise bu sayılardan küçüğü kaçtır?

2. $2x - 5 < -3$ eşitsizliğini sağlayan gerçek sayılar aşağıdakilerden hangisinde doğru gösterilmiştir?

A) 

B) 

C) 

D) 

3. Aşağıdaki soruların yanıtlarını boş bırakılan yerlere yazınız.

$4x + 15 > 2$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane negatif tam sayı vardır? ....

$\dfrac{x-6}{3} \leq -1$ eşitsizliğini sağlayan en büyük doğal sayı kaçtır? ....

$14 - 5x \leq 46$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane negatif tam sayı vardır? ....

$3x - 12 \leq 10$ eşitsizliğini sağlayan kaç tane pozitif tam sayı vardır? ....

4. Aşağıdakilerden hangisi $4x - 2 > 12$ eşitsizliğini sağlamaz?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6

5. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulup sayı doğrusunda gösteriniz.

a) $2x - 7 \geq -13$

b) $3(x - 3) < 5$

c) $4x - 6 > 2x - 8$

ç) $2x - 7 \leq 3x - 5$

d) $\dfrac{x-2}{5} > -3$

e) $\dfrac{2x-1}{4} \geq \dfrac{x-2}{3}$

f) $x - 8 \leq 4$

g) $6 - 2x > -8$

ğ) $14 \leq 16 - x$

h) $1 \geq 5 - 2x$

4. Ünite Değerlendirme

1. Aşağıdaki doğru denklemleriyle doğruların eğimlerini eşleştiriniz.

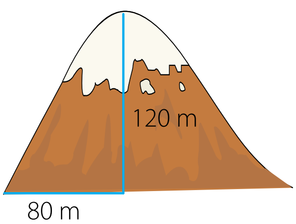
I. $y = 5x + 2$	a) 0
II. $y - 2x - 2 = 0$	b) $\frac{5}{3}$
III. $2y + 3x = 0$	c) 2
IV. $y = -3x - 5$	ç) $\frac{-3}{2}$
V. $x + 3y - 2 = 0$	d) tanımsız
VI. $5x - 3y + 6 = 0$	e) -4
VII. $x + 6y = 0$	f) 5
VIII. $x = -2$	g) -3
IX. $y = -4x$	ğ) $\frac{-1}{3}$
X. $y = 3$	h) $\frac{-1}{6}$

2. Aşağıda verilen doğrulardan hangisinin eğimi diğerlerinden farklıdır?

A) $x = 2y$ B) $2y - 4x = 0$

C) $y = 2x - 2$ D) $y - 2x - 2 = 0$

3.



Yukarıdaki dağın eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $-\frac{2}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}$

4. $\frac{4}{3} - \frac{2x}{5} = 1 + \frac{x}{3}$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) $\frac{5}{11}$ C) $\frac{-5}{11}$ D) $\frac{11}{5}$

5. $3x - 4y = 12$ doğru denkleminin grafiğinin, eksenleri kestiği noktalar aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

A) (3, 0) ve (0, 4) B) (4, 0) ve (0, 3)

C) (4, 0) ve (0, –3) D) (–4, 0) ve (0, –3)

6. Ayşe, burs verdiği üniversite öğrencisine doğum günüde hediye alacaktır. Bunun için 200 TL olan parasına her ay 50 TL eklemektedir. Ay sayısına x, biriken paraya y dersek, ay ve biriken para arasındaki ilişki aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x + 50$ B) $y = 200 + 50x$

C) $y = 200x + 50$ D) $y = 200 + x$

7. Aşağıdaki doğru denklemlerinin hangisinin grafiği orijinden geçer?

A) $2y - 5x = 0$ B) $x - 3y = 4$

C) $4x - 5y = 2$ D) $x + 3y - 2 = 0$

8. $\dfrac{2x+1}{5} - \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{x-3}{10} + 1$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{13}{8}$ B) $\dfrac{3}{8}$ C) $\dfrac{13}{4}$ D) $\dfrac{5}{4}$

9. Aşağıdaki doğruların grafiklerinin hangisi x eksenine paraleldir?

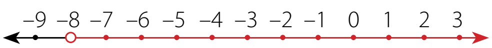
A) $x = 2$ B) $y = -3$

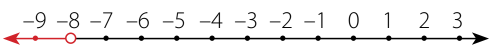
C) $y - 3x = 0$ D) $x = 3y$

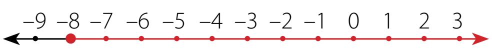
10. $6x + ay - 5 = 0$ doğrusunun eğimi 2 ise a kaçtır?

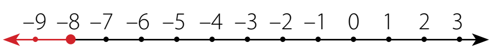
A) 2 B) –2 C) –3 D) 3

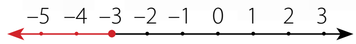
11. $x > -8$ eşitsizliğinin sayı doğrusunda gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

D) 

12. 

Sayı doğrusunda gösterilen gerçek sayılar aşağıdakilerden hangisinde doğru verilmiştir?

A) $x < -3$ B) $x \leq -3$

C) $x > -3$ D) $x \geq -3$

13. $\dfrac{3x-5}{4} = \dfrac{x+2}{a}$ denklemini sağlayan x değeri 2 ise a kaçtır?

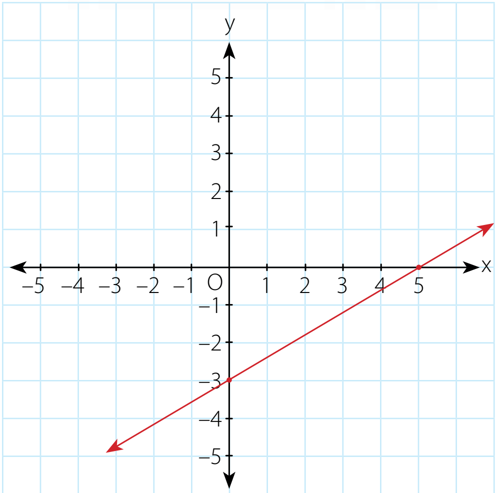
A) –29 B) –23 C) 4 D) 16

14. Yanda bir otoparkın ücret tarifesi görülmektedir. Bu otoparka bırakılan bir aracın otoparkta kalma süresine göre ödenecek ücreti gösteren bir tablo oluşturunuz.

Açılış: 08.00
Kapanış: 24.00
Saat ücreti: 2 TL

Bu ilişkiyi gösteren denklemi yazınız.

15.



Yukarıda grafiği verilen doğrunun eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 3

16. Aşağıda verilen tam sayılardan hangisi $-2x + 3 > 5$ eşitsizliğini sağlayan tam sayılardan biridir?

A) 5 B) 3 C) 0 D) −2

17. $2 - 4x < 3x - 12$ eşitsizliğini sağlayan x değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x < 2$ B) $x < 7$

C) $x > 2$ D) $x > -2$

18. "Bir sayının iki katının 3 eksiği, o sayının 5 katından büyüktür." cümlesinin cebirsel ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

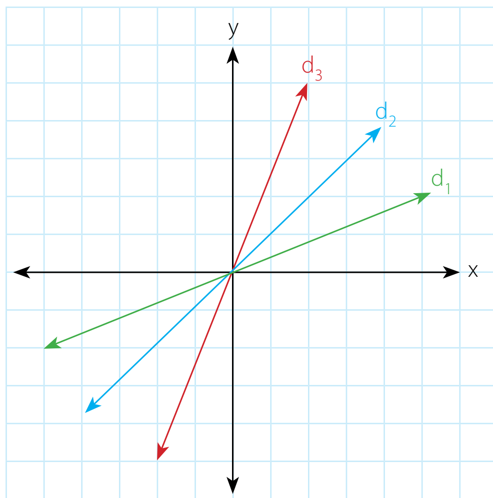
A) $2x - 3 > 5x$ B) $2x - 3 > x + 5$

C) $2(x - 3) > 5x$ D) $2(x - 3) > 5 + x$

19. $3(x - 5) \leq -6$ eşitsizliğini sağlayan x değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x \leq -7$ B) $x \leq -3$ C) $x \leq 3$ D) $x \leq 7$

20.



d_1 doğrusunun eğimi m_1

d_2 doğrusunun eğimi m_2

d_3 doğrusunun eğimi m_3

olmak üzere doğruların eğimlerini bulunuz.

21. $\frac{x-1}{2} + 4 = \frac{2x+3}{5}$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) –29 B) –23 C) 4 D) 13

22. 2x – 12 = 3(x – 6) denklemini sağlayan tam sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) –6 B) –2 C) 6 D) 2

23. 2x – 5 > 7 eşitsizliğini aşağıdakilerden hangisi <u>sağlamaz</u>?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6

24. (m + 1) x – 8 = 0 denklemini sağlayan x değeri 4 ise m kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

25. 4x – 2y + 3 = 0 eşitliğindeki değişkenler birbirleri cinsinden yazılmıştır. Bunlar doğru ise kutucuklara "D", yanlış ise "Y" yazınız.

a) ☐ $x = \frac{3-2y}{-4}$ b) ☐ $y = \frac{3-4x}{2}$

c) ☐ $x = \frac{2y-3}{4}$ ç) ☐ $y = \frac{4x+3}{2}$

26. 3(x – 7) + 5(x – 3) = 6x + 4 denklemini sağlayan sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 B) $\frac{40}{21}$ C) $\frac{27}{7}$ D) 38

27. $\frac{2x-3}{5} < \frac{4}{7}$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayılar kaç tanedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

28. Aşağıdaki doğru denkleminden hangisinin eğimi diğerlerinden farklıdır?

A) y = 3x – 5 B) 3y – x + 1 = 0

C) y – 3x + 5 = 0 D) 3y = 9x – 5

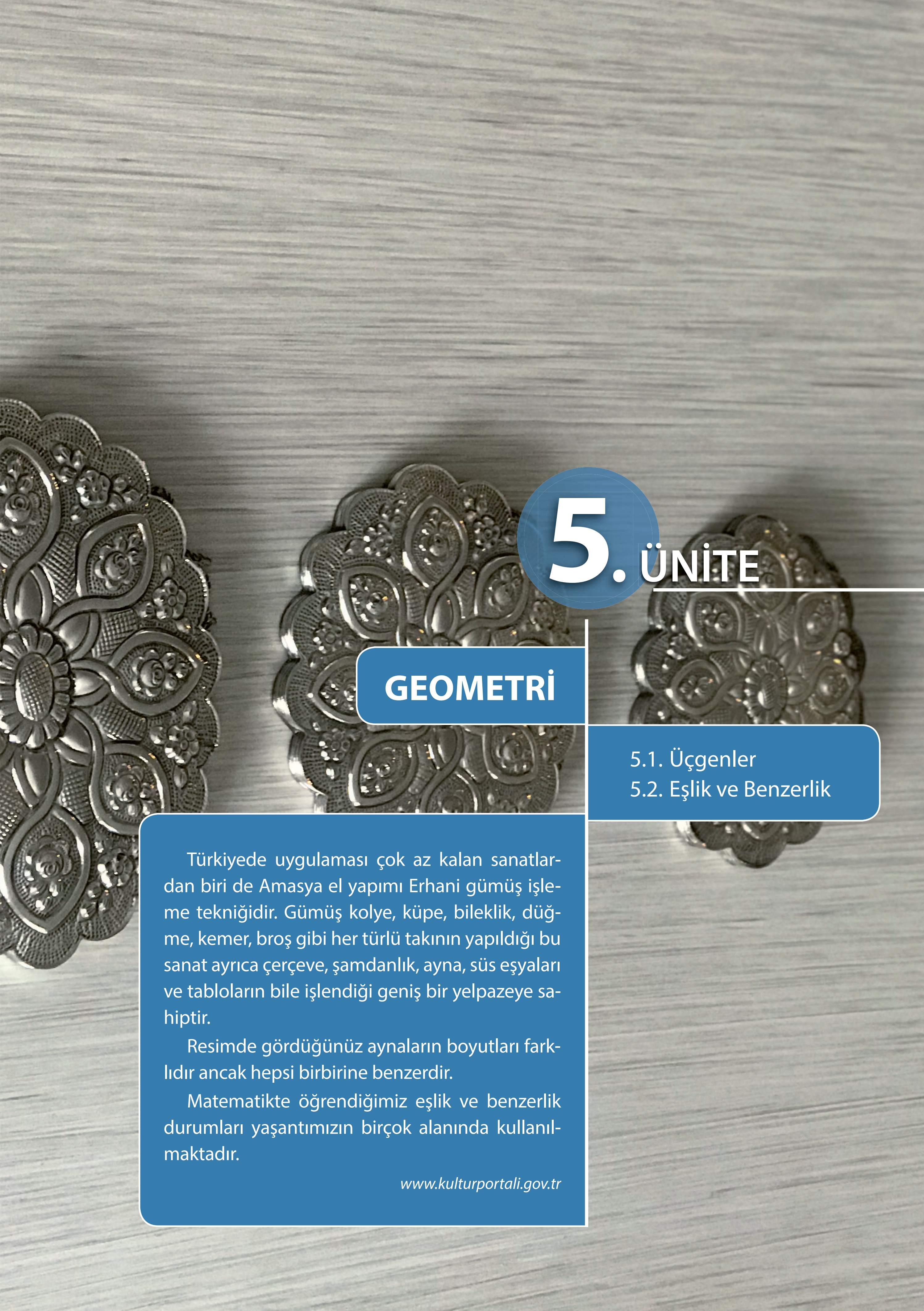
29. y = mx – 5 doğrusunun B(2, 3) noktasından geçmesi için eğim ne olmalıdır?

A) –4 B) –3 C) 3 D) 4

30. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ doğrusal denkleminde x'in y cinsinden yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2y-6}{3}$ B) $\frac{6-2y}{3}$

C) $\frac{3y-6}{2}$ D) $\frac{y-6}{3}$



5. ÜNİTE

GEOMETRİ

5.1. Üçgenler
5.2. Eşlik ve Benzerlik

Türkiyede uygulaması çok az kalan sanatlardan biri de Amasya el yapımı Erhani gümüş işleme tekniğidir. Gümüş kolye, küpe, bileklik, düğme, kemer, broş gibi her türlü takının yapıldığı bu sanat ayrıca çerçeve, şamdanlık, ayna, süs eşyaları ve tabloların bile işlendiği geniş bir yelpazeye sahiptir.

Resimde gördüğünüz aynaların boyutları farklıdır ancak hepsi birbirine benzerdir.

Matematikte öğrendiğimiz eşlik ve benzerlik durumları yaşantımızın birçok alanında kullanılmaktadır.

www.kulturportali.gov.tr

5.1. Bölüm
Üçgenler

Çelik Üçgen

Bu çalgı; üçgen şeklinde bükülmüş, iki köşesi biraz yuvarlak duruma getirilmiş ve bir köşesi açık olan, genellikle çelik bir çubuktan oluşur.

Çelik üçgen, Klasik Batı Müziği çalgısıdır. Bir metal çubuğun üçgen oluşturacak şekilde bükülmesiyle oluşan şeklinden dolayı adı "triangle"dır (trayngıl). Çelik üçgen, küçük bir metal çubukla çalınır.

Geometri bölümlerindeki düzlemsel şekil olan üçgen, kapalı bir şekildir.

Bir çelik çubukla istenen her kenar uzunluğunda üçgen yapılabilir mi?

Terimler veya Kavramlar

- *Üçgen eşitsizliği*
- *Dik kenarlar*
- *Hipotenüs*
- *Kenarortay*
- *Açıortay*
- *Yükseklik*
- *Pisagor bağıntısı*

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Üçgende kenarortay, açıortay ve yükseklik inşa etme*
- *Üçgenin iki kenar uzunluğunun toplamı veya farkı ile üçüncü kenarının uzunluğunu ilişkilendirme*
- *Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarların karşısındaki açı ölçülerini ilişkilendirme*
- *Yeterli sayıda elemanının ölçüleri verilen bir üçgeni çizme*
- *Pisagor bağıntısını oluşturma, ilgili problem çözme*

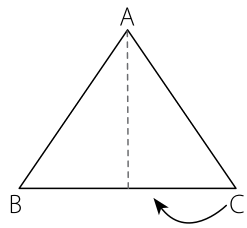
5.1.1. Üçgende Kenarortay, Açıortay ve Yükseklik İnşa Etme

Hatırlayalım

Kâğıt katlayarak bir üçgenin açıortay, kenarortay ve yüksekliğini çizelim. Kâğıttan bir üçgen hazırlayalım:

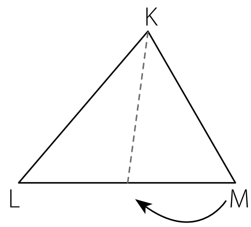
- ABC üçgeninin A açısını oluşturan kenarlarını, üst üste gelecek şekilde katlayalım. Oluşan kat izi boyunca bir doğru parçası çizelim. Bu doğru parçası BAC açısının açıortayıdır.

  Siz de oluşturduğunuz üçgenin tüm açılarına ait açıortaylarını bu şekilde kâğıdı katlayarak inşa ediniz.



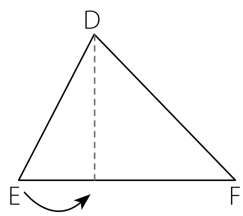
- Üçgenin L ve M köşelerini üst üste getirerek [LM]'nın orta noktasını bulalım. Bu işlem sırasında [LM] üzerinde oluşan kat izi ile K noktasını birleştiren bir doğru parçası çizelim. Bu doğru parçası [LM]'nın kenarortayıdır.

  Siz de oluşturduğunuz bir üçgenin tüm kenarlarına ait kenarortaylarını bu şekilde kâğıdı katlayarak inşa ediniz.

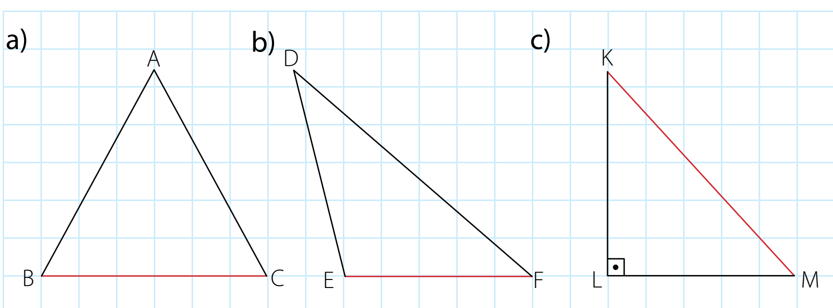


- Üçgeni, D noktası tepede kalacak ve [EF] çakışacak şekilde katlayalım. Bu sırada E noktasının [EF] üzerinde olmasına dikkat edelim. Oluşan kat izi boyunca bir doğru parçası çizelim. Bu doğru parçası, [EF]'na ait yüksekliktir.

  Siz de oluşturduğunuz bir üçgenin tüm kenarlarına ait yüksekliklerini bu şekilde kâğıdı katlayarak inşa ediniz.

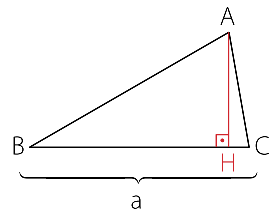


1. Örnek

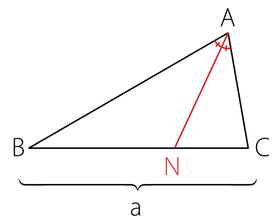


Yukarıda verilen üçgenlerin kırmızı ile belirtilmiş kenarlarına ait yüksekliklerini gönye yardımıyla çizelim.

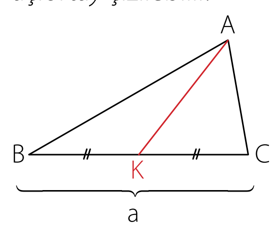
Bilgi Kutusu



*Bir üçgende, bir köşeden karşısındaki kenara çizilen dik doğru parçasına, o kenara ait **yükseklik** denir. Bir üçgende, üç kenara ait üç tane yükseklik çizilebilir.*



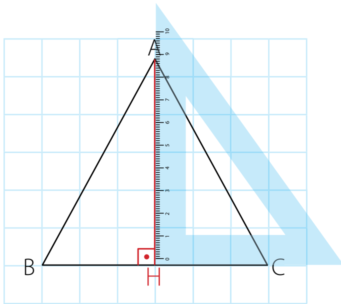
*Bir üçgende, bir açıyı iki eş parçaya ayıran ve bu açının karşısındaki kenara çizilen doğru parçasına o açının **açıortay** denir. Bir üçgende üç iç açıya ait, üç tane iç açıortay çizilebilir.*



*Bir üçgende, bir köşeden karşısındaki kenarı iki eş parçaya ayıracak şekilde çizilen doğru parçasına, o kenara ait **kenarortay** denir. Bir üçgende üç kenara ait, üç tane kenarortay çizilebilir.*

Çözüm

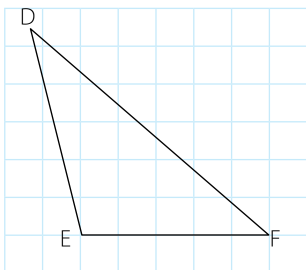
a)



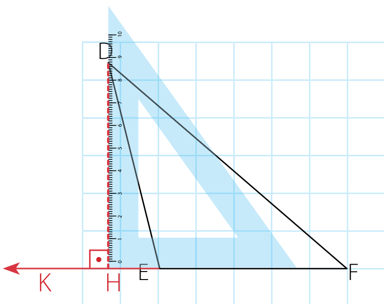
ABC dar açılı bir üçgendir. Gönyeyi, sivri ucu A köşesine, alt kısmı [BC]'na gelecek şekilde yerleştirelim. A köşesinden [BC]'na bir doğru parçası çizelim. [AH], ABC üçgeninin [BC]'na ait yüksekliğidir.

Siz de AC ve AB kenarlarına ait yükseklikleri çiziniz.

b)



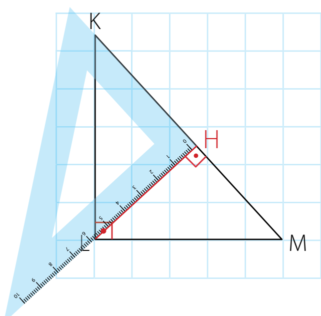
DEF geniş açılı bir üçgendir. [EF]'nı uzatalım.



Gönyeyi, alt kısmı [FK] üzerine, sivri ucu D noktasına gelecek şekilde yerleştirelim. D köşesinden [FK'na bir doğru parçası çizelim. [DH], DEF üçgeninin [EF]'na ait yüksekliğidir.

Siz de [DF] ve [DE] ait yükseklikleri çiziniz.

c)

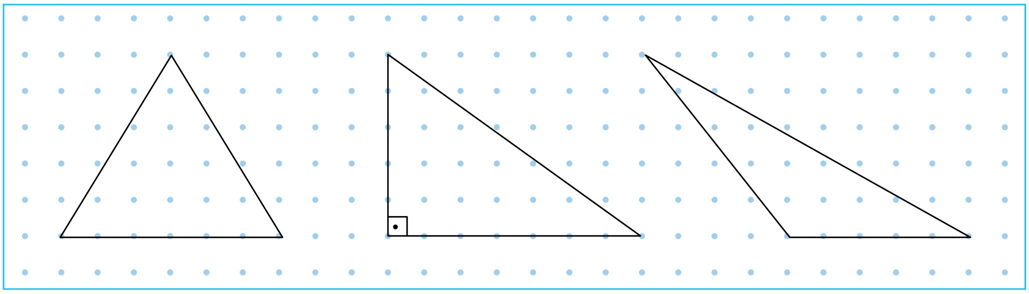


KLM üçgeni dik üçgen olduğundan [KL], üçgenin [LM]'na ait yüksekliğidir. [LM] da üçgenin [KL]'na ait yüksekliğidir. [KM]'na ait yüksekliği çizelim. Gönyeyi, alt kısmı [KM]'na, sivri ucu L köşesine gelecek şekilde yerleştirelim. L köşesinden [KM]'na dik bir doğru parçası çizelim. [LH], KLM üçgeninin [KM]'na ait yüksekliğidir.

Etkinlik

Araç ve Gereç: noktalı kâğıt, kalem, makas

Köşeleri noktaların üzerinde olacak şekilde noktalı kâğıda aşağıdaki gibi dar açılı, geniş açılı, dik açılı üçgenler çiziniz.

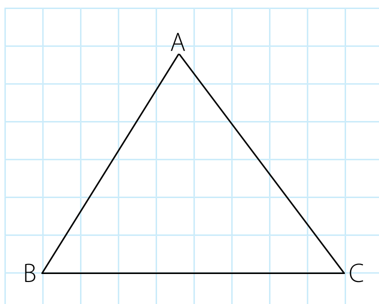


- Çizdiğiniz üçgenleri kesiniz.
- Kestiğiniz üçgenlerin kenarlarının orta noktalarını üçgenleri katlayarak bulunuz.
- Üçgenlerin kenarlarının orta noktaları ile bu noktaların karşısındaki köşeleri birleştirerek birer doğru parçası çiziniz.

✓ Çizdiğiniz doğru parçalarının özel bir adı var mıdır? Bu doğru parçalarının kesiştiği noktanın özel bir adı var mıdır?

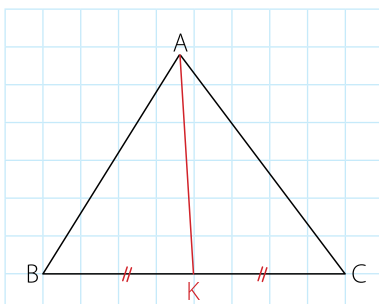
2. Örnek

ABC üçgeninin kenarortaylarını çizelim.

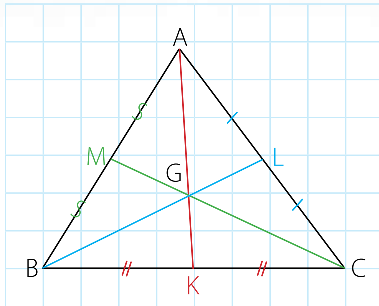


Çözüm

Kareleri sayarak [BC]'nın orta noktasını işaretleyelim. Bu noktayı K ile isimlendirelim. A köşesi ile K noktasını birleştirelim. [AK], $\widehat{ABC}$ 'nin [BC]'na ait kenarortayıdır.



Cetvelle ölçerek [AC]'nın orta noktasını bulup L ile, [AB]'nın orta noktasını bulup M ile isimlendirelim. B köşesi ile L noktasını, C köşesi ile M noktasını birleştirelim.



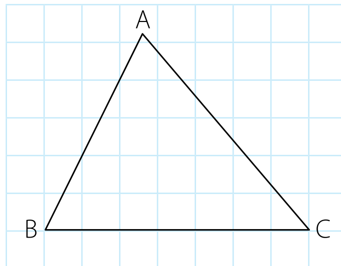
[MC], $\widehat{ABC}$ 'nin AB kenarına ait kenarortayıdır.

[BL], $\widehat{ABC}$ 'nin AC kenarına ait kenarortayıdır.

Üçgenin kenarortayları bir noktada kesişir.

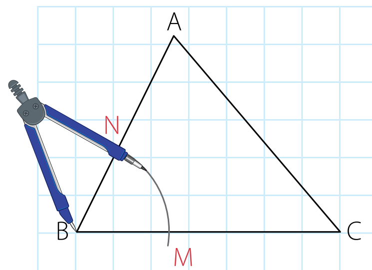
3. Örnek

Pergel ve cetvel kullanarak üçgenin açıortaylarını çizelim.

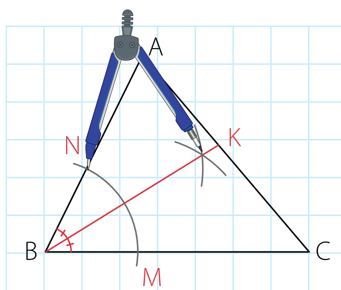


Çözüm

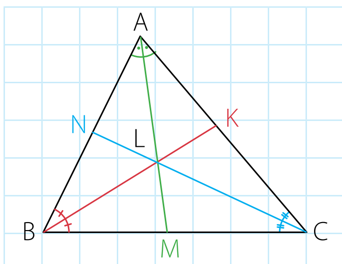
Üçgenin B köşesine pergelin sivri ucunu yerleştirip bir yay çizelim. Yayın BC kenarını kestiği noktaya M, AB kenarını kestiği noktaya N diyelim.



Pergelin açıklığını bozmadan sivri ucunu önce M noktasına, sonra N noktasına koyarak iki yay çizelim. İki yayın kesiştiği nokta ile B noktası birleştirildiğinde B açısına ait açıortay çizilmiş olur.



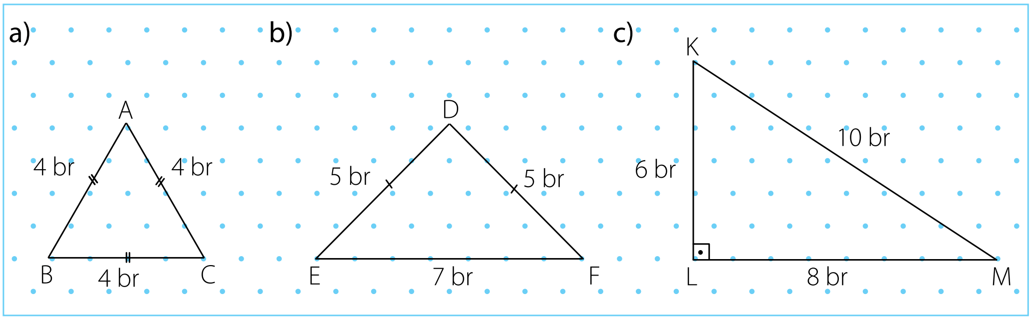
Siz de A ve C açılarına ait açıortayları çiziniz.



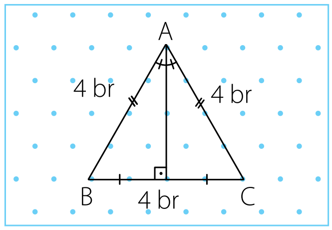
Üçgenin açıortayları bir noktada kesişir.

4. Örnek

Aşağıda verilen üçgenlerin kenarortay, açıortay ve yüksekliklerini çizelim.

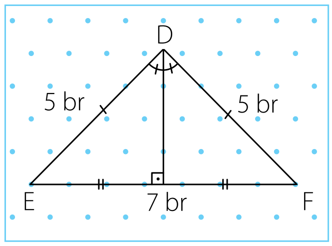


Çözüm



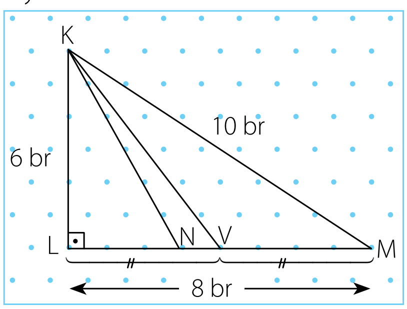
a) ABC eşkenar üçgendir. Üçgenin her kenarı için çizilen kenarortay, açıortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır.

Siz de diğer kenarlara ait açıortay, kenarortay ve yükseklikleri çiziniz.



b) DEF üçgeni ikizkenar üçgendir. EF kenarına ait kenarortay, açıortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır.

Siz de diğer kenarlara ait açıortay, kenarortay ve yükseklikleri çiziniz.

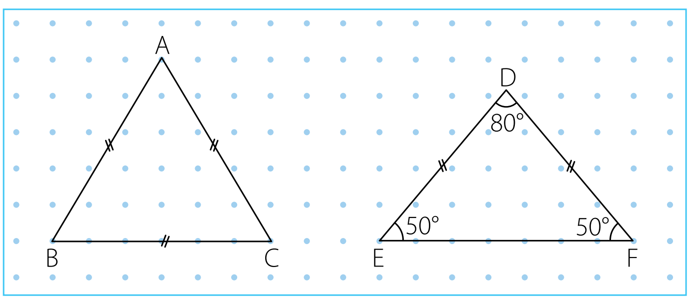


c) KLM dik üçgendir. LM kenarına ait yükseklik [KL], açıortay [KN] kenarortay [KV]'dır.

Siz de diğer kenarlara ait açıortay, kenarortay ve yükseklikleri çiziniz.

5. Örnek

Yandaki noktalı düzlemde verilen eşkenar ve ikizkenar üçgenlerin açıortay, kenarortay ve yüksekliklerini çizelim.

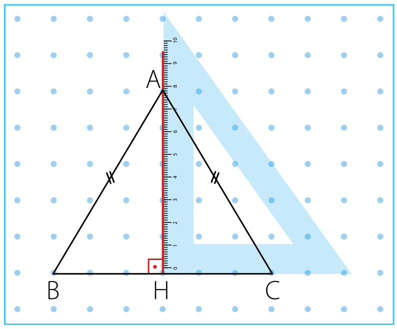


Bilgi Kutusu
Bir eşkenar üçgende yükseklik, kenarortay ve açıortay aynı doğru parçasıdır.

Bilgi Kutusu
Bir ikizkenar üçgende tabana ait kenarortay, açıortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır.

Bilgi Kutusu
Bir dik üçgende dik kenarlar aynı zamanda üçgenin yüksekliğidir.

Çözüm
Eşkenar üçgenin kenarortay, açıortay ve yüksekliğini çizelim.

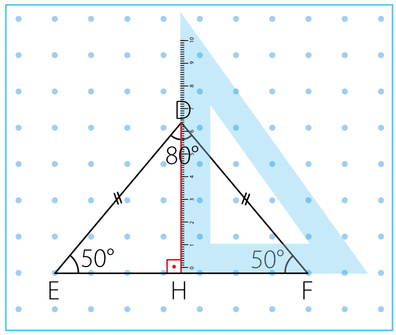


Gönye yardımıyla çizdiğimiz yükseklik, BC kenarını iki eşit parçaya ayırır.

BAH ile HAC açılarının ölçülerini iletki yardımı ile bulalım.

$m(\widehat{BAH}) = 30°$ ve $m(\widehat{HAC}) = 30°$dir.

O hâlde [AH], hem açıortay hem kenarortay hem de yüksekliktir.



İkizkenar üçgenin kenarortay, açıortay ve yüksekliğini çizelim.

Gönye yardımıyla çizdiğimiz yükseklik, EF kenarını iki eşit parçaya ayırır.

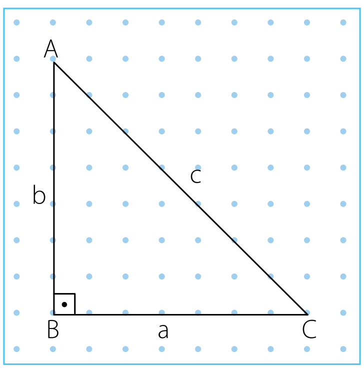
EDH ile HDF açılarının ölçülerini iletki yardımı ile bulalım.

$m(\widehat{EDH}) = 40°$ ve $m(\widehat{HDF}) = 40°$dir.

O hâlde [DH] hem açıortay hem kenarortay hem de yüksekliktir.

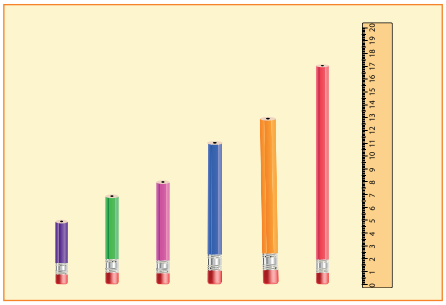
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Cetvel kullanarak dar açılı bir üçgen ve bu üçgene ait kenarortayları çiziniz.
2. Gönye yardımıyla geniş açılı bir üçgen ve bu üçgene ait yükseklikleri çiziniz.
3. Pergel ve gönye kullanarak bir dik üçgen ve bu üçgene ait açıortayları çiziniz.
4. Aşağıdaki noktalı kâğıtta verilen dik üçgenin c kenarına ait kenarortay, açıortay ve yüksekliğini çiziniz.

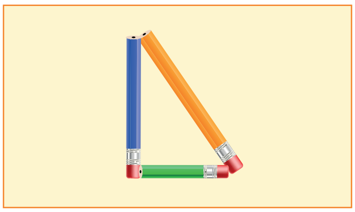


5.1.2. Üçgenlerin Kenar Uzunlukları Arasındaki İlişkiler

Uzunlukları 5, 7, 8, 11, 13 ve 17 cm olan kalemlerle üçgenler oluşturunuz. Seçtiğiniz her üç kalemle üçgen oluşturabildiniz mi?



- 7, 11 ve 13 cm'lik kalemleri alalım ve üçgen oluşturmaya çalışalım.



Oluşturduğumuz bu üçgenin kenarları arasındaki ilişkiye bakalım.

7 cm'lik kalemle üçgen oluşturacak kalemler, 11 ve 13 cm uzunluğundadır.

13 + 11 = 24'tür. 24 sayısı 7'den büyüktür.

13 – 11 = 2'dir. 2 sayısı 7'den küçüktür.

11 cm'lik kalemle üçgen oluşturacak kalemler, 7 ve 13 cm uzunluğundadır.

13 + 7 = 20'dir. 20 sayısı 11'den büyüktür.

13 – 7 = 6'dır. 6 sayısı 11'den küçüktür.

13 cm'lik kalemle üçgen oluşturacak kalemler, 7 ve 11 cm uzunluğundadır.

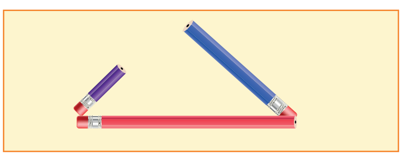
11 + 7 = 18'dir. 18 sayısı 13'ten büyüktür.

11 – 7 = 4'tür. 4 sayısı 13'ten küçüktür.

Görüldüğü gibi bu üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamı, üçüncü kenarın uzunluğundan büyüktür. İki kenarın uzunlukları farkı ise üçüncü kenarın uzunluğundan küçüktür.

7, 11 ve 13 cm'lik kalemlerle üçgen oluşturulabilmektedir.

- 5, 11 ve 17 cm'lik kalemleri alalım ve bu kalemlerle üçgen oluşturmaya çalışalım.



Oluşturmaya çalıştığımız üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiye bakalım.

11 cm'lik kalemle üçgen oluşturmaya çalıştığımız kalemlerin uzunluğu 5 ve 17 cm'dir.

17 + 5 = 22'dir. 22 sayısı 11'den büyüktür.

17 – 5 = 12'dir. 12 sayısı 11'den büyüktür.

17 cm'lik kalemle üçgen oluşturmaya çalıştığımız kalemlerin uzunluğu 5 ve 11 cm'dir.

11 + 5 = 16'dır. 16 sayısı 17'den küçüktür.

11 – 5 = 6'dır. 6 sayısı 17'den küçüktür.

5 cm'lik kalemle üçgen oluşturmaya çalıştığımız kalemlerin uzunluğu 11 ve 17 cm'dir.

17 + 11 = 28'dir. 28 sayısı 5'ten büyüktür.

17 – 11 = 6'dır. 6 sayısı 5'ten büyüktür.

5 cm, 11cm ve 17 cm'lik kalemlerle üçgen oluşturulamaz.

Etkinlik

Araç ve Gereç: 20 cm uzunluğunda tel

- Teli, aşağıda ölçüleri verilen uzunluklarda bükerek üçgen oluşturmaya çalışınız.

  8 cm, 6 cm, 6 cm   7 cm, 5 cm, 8 cm   2 cm, 10 cm, 8 cm

  3 cm, 5 cm, 12 cm   10 cm, 5 cm, 5 cm   9 cm, 6 cm, 5 cm

  ✓ Hangi kenar uzunluklarıyla üçgen oluşturabildiniz? Neden?

  ✓ Hangi kenar uzunluklarıyla üçgen oluşturamadınız? Neden?

- Siz de bu telle kenar uzunluklarını belirlediğiniz üçgenleri oluşturmaya çalışınız. Oluşturmaya çalıştığınız üçgenin kenar uzunluklarını yazınız.

  ✓ Oluşturduğunuz üçgenlerin iki kenar uzunluğunun toplamı veya farkının mutlak değeri ile üçüncü kenarın uzunluğu arasında nasıl bir ilişki vardır?

1. Örnek

Aşağıda uzunlukları verilen doğru parçalarıyla üçgen oluşturulup oluşturulamayacağını belirleyelim.

a) 5 cm, 9 cm, 12 cm   **b)** 15 cm, 29 cm, 36 cm   **c)** 28 cm, 53 cm, 99 cm

Çözüm

İki uzunluğun toplamı ve farkı ile diğer uzunluğu karşılaştıralım.

a) $5 + 9 = 14 > 12$ $|5 - 9| = |-4| = 4 < 12$

$5 + 12 = 17 > 9$ $|5 - 12| = |-7| = 7 < 9$

$9 + 12 = 21 > 5$ $|9 - 12| = |-3| = 3 < 5$

İki uzunluğun toplamı üçüncü uzunluktan büyük, iki uzunluğun farkının mutlak değeri üçüncü uzunluktan küçüktür. O hâlde bu doğru parçaları ile üçgen oluşturulabilir.

b) $29 + 15 = 44 > 36$ $\quad |29 - 15| = 14 < 36$

$36 + 15 = 51 > 29$ $\quad |36 - 15| = 21 < 29$

$36 + 29 = 65 > 15$ $\quad |36 - 29| = 7 < 15$

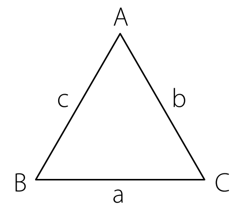
Bu doğru parçaları ile üçgen oluşturulabilir.

c) $28 + 53 = 81 < 99$

İki uzunluğun toplamı üçüncü uzunluktan büyük olmadığı için bu doğru parçaları ile üçgen oluşturulamaz. Diğer eşitsizlikleri kontrol etmeye gerek yoktur.

Bilgi Kutusu

Üçgende bir kenar uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları farkının mutlak değerinden büyük, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçüktür.



$|b - c| < a < b + c$

$|a - b| < c < a + b$

$|a - c| < b < a + c$'dir.

Bu eşitsizliklere ***üçgen eşitsizliği*** *denir.*

Sıra Sizde

Aşağıda uzunlukları verilen doğru parçalarıyla üçgen oluşturulup oluşturulamayacağını belirleyiniz.

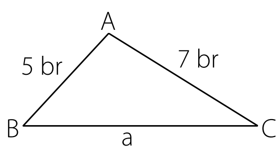
a) 25 cm, 23 cm, 15 cm **b)** 6 cm, 12 cm, 19 cm

c) 39 cm, 57 cm, 92 cm **ç)** 5 cm, 12 cm, 13 cm

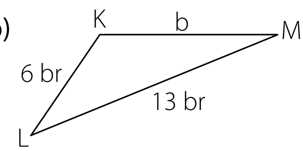
2. Örnek

Aşağıdaki üçgenlerde, verilmeyen kenar uzunluklarının alabileceği doğal sayı değerlerini belirleyelim.

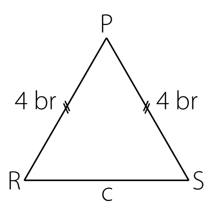
a)



b)



c)



Çözüm

Verilmeyen kenar uzunlukları diğer kenar uzunluklarının toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyük olmalıdır.

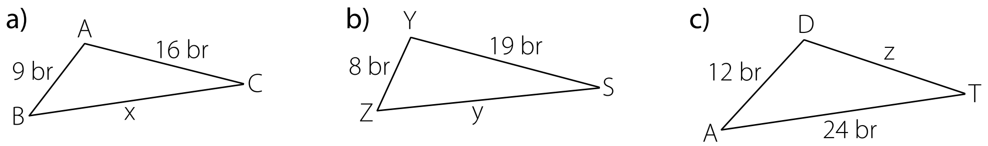
a) $7 + 5 = 12 > a$ $|7 - 5| = 2 < a$ olduğundan a; 2'den büyük, 12'den küçük olmalıdır. O hâlde a; 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ve 11 doğal sayı değerlerini alabilir.

b) $13 + 6 = 19 > b$ $|13 - 6| = 7 < b$ olduğundan b; 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 ve 18 doğal sayı değerlerini alabilir.

c) $4 + 4 = 8 > c$ $|4 - 4| = 0 < c$ olduğundan c; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 doğal sayı değerlerini alabilir.

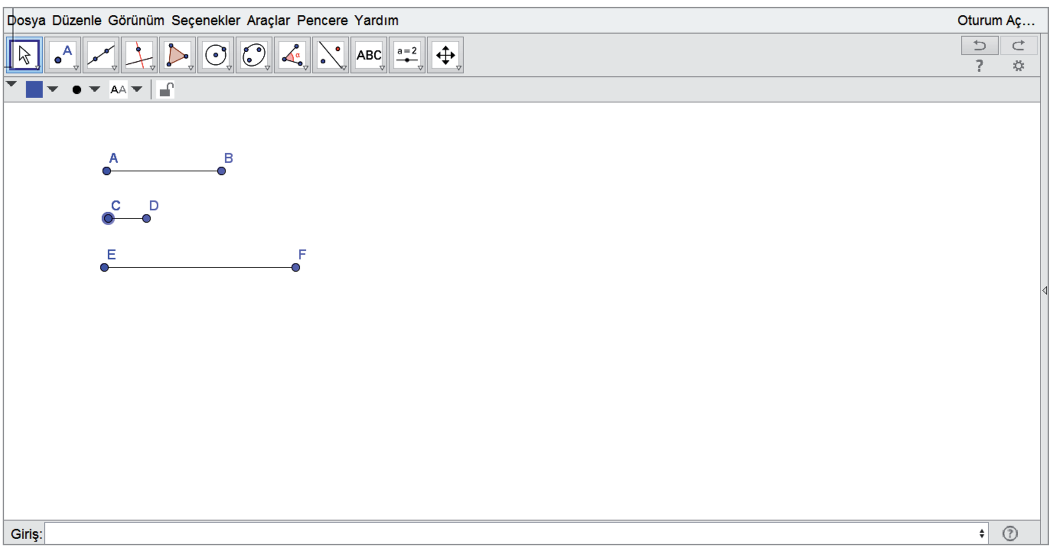
Sıra Sizde

Aşağıdaki üçgenlerde verilmeyen kenar uzunluklarının alabileceği doğal sayı değerlerini belirleyiniz.

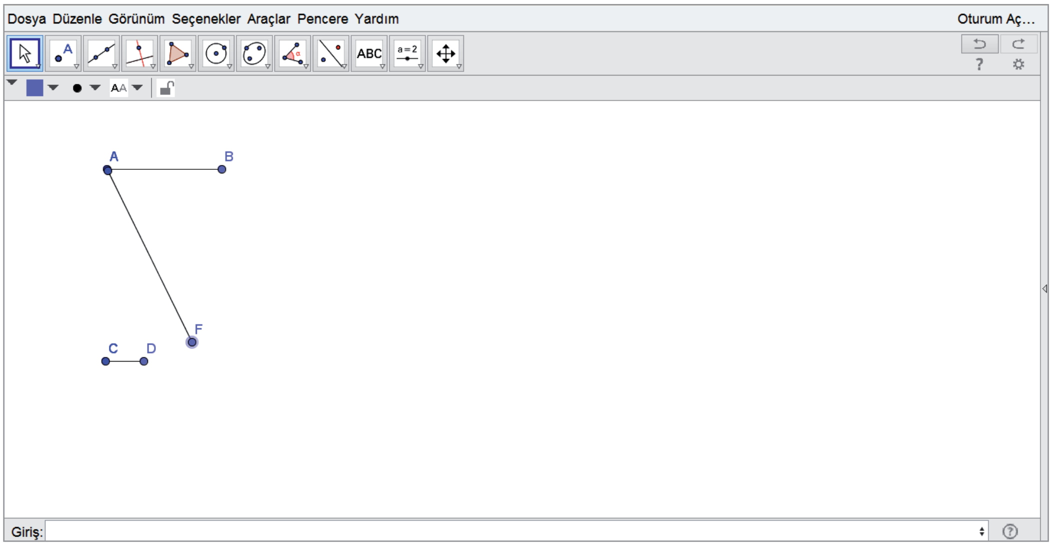


3. Örnek

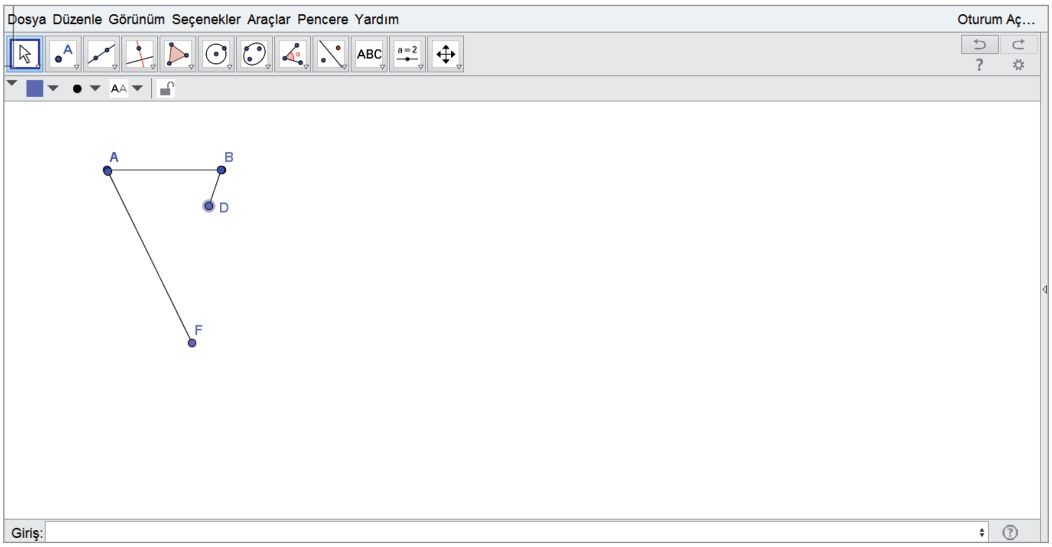
Bir dinamik geometri yazılımı edinelim. "Verilen uzunlukta doğru parçası" sekmesini seçelim. Bir nokta belirleyelim. Uzunluk kısmına 3 yazalım. Aynı şekilde iki nokta daha seçip uzunlukları 1 ve 5 olarak seçelim.



“Taşı” sekmesinden yararlanarak E noktasını A noktasının üzerine getirelim. F noktasından [EF]’nı hareket ettirelim.



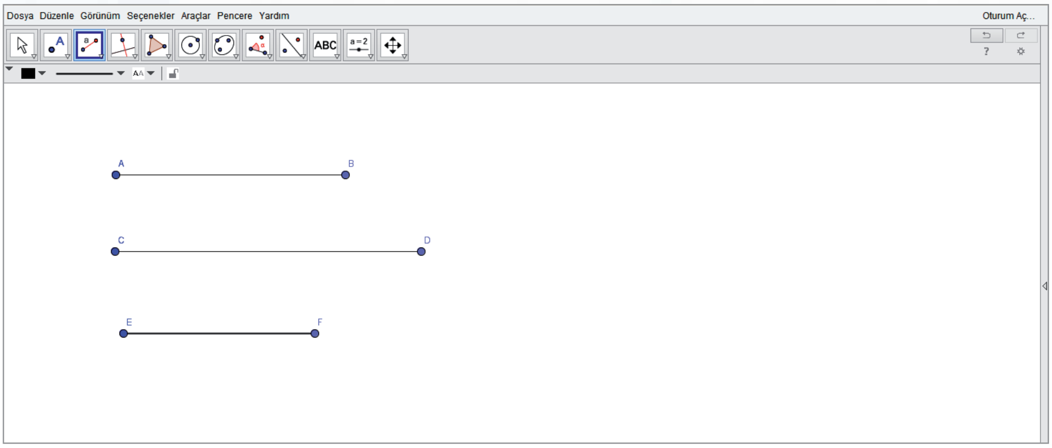
Aynı şekilde C noktasını B noktasının üzerine getirelim. D noktasından [CD]’nı hareket ettirelim.



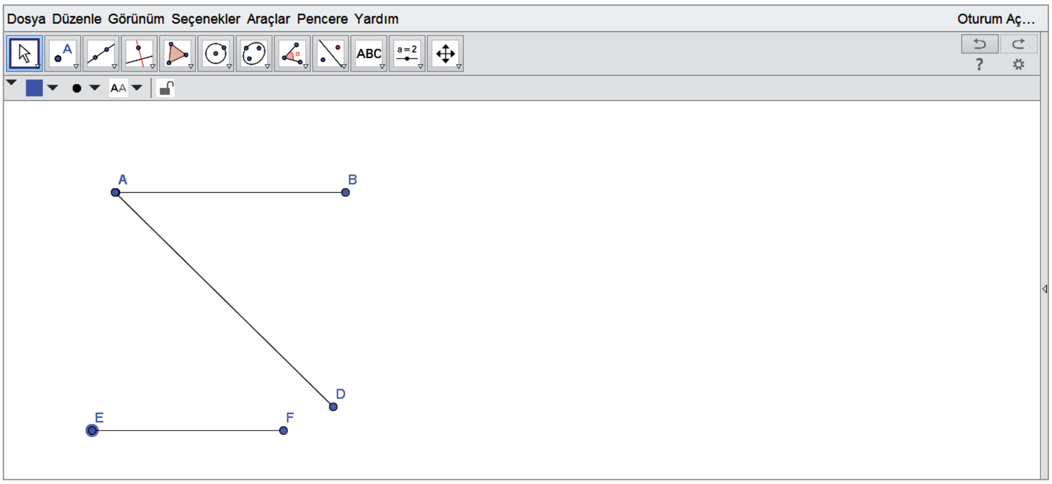
Ekranda da görüldüğü gibi uzunlukları 3 cm, 1 cm ve 5 cm olan doğru parçalarıyla bir üçgen oluşmamıştır.

4. Örnek

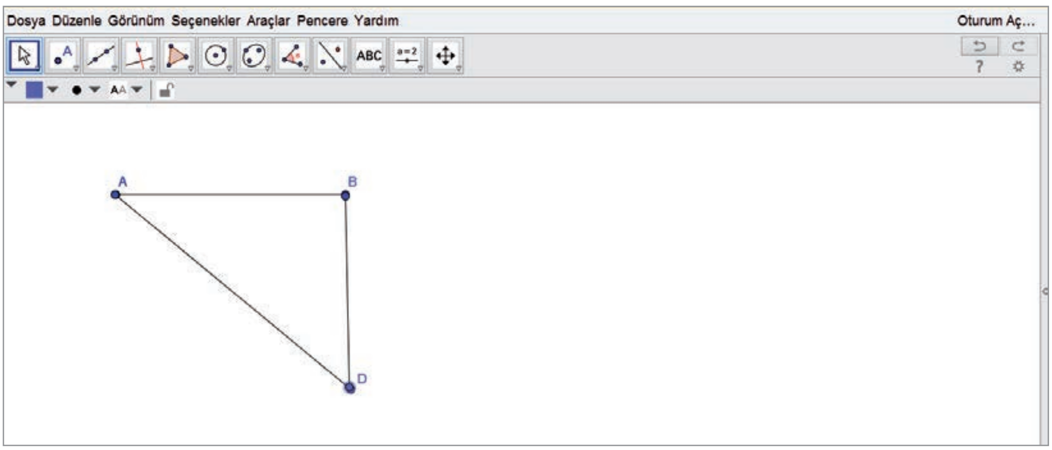
Bir dinamik geometri yazılımı edinelim. “Verilen uzunlukta doğru parçası” sekmesini seçelim. Bir nokta belirleyelim. Uzunluk kısmına 6 yazalım. Aynı şekilde iki nokta daha seçip uzunlukları 8 ve 5 olarak seçelim.



"Taşı" sekmesinden yararlanarak E noktasını A noktasının üzerine getirelim. F noktasından [EF]'nı hareket ettirelim.



Aynı şekilde C noktasını B noktasının üzerine getirelim. D noktasından [CD]'nı hareket ettirelim.



Ekranda da görüldüğü gibi uzunlukları 6 cm, 8 cm ve 5 cm olan doğru parçalarıyla bir üçgen oluşmuştur.

Sıra Sizde

Aşağıda verilen uzunlukların bir üçgen oluşturup oluşturmayacağını dinamik geometri yazılımı kullanarak belirleyiniz.

a) 2 br   9 br   10 br **b)** 8 br   6 br   10 br **c)** 12 br   13 br   14 br

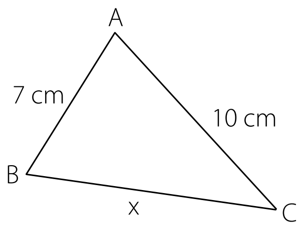
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen kenar uzunlukları ile bir üçgen çizilebilir mi? Belirleyiniz.

a) 2 cm, 1 cm, 3 cm **b)** 15 cm, 11 cm, 23 cm

c) 9 cm, 11 cm, 15 cm **ç)** 24 cm, 10 cm, 6 cm

2. Aşağıdaki üçgende, verilmeyen kenar uzunluğu hangi doğal sayı değerlerini alabilir?



3. Kenarlarından birinin uzunluğu 15 cm, diğerinin uzunluğu 23 cm olan bir üçgenin çevre uzunluğunun alabileceği tam sayı değeri en fazla ve en az kaç santimetre olabilir?

4. Bir ABC üçgeninin kenar uzunluklarından biri 6 cm, diğeri 8 cm'dir. Bu üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

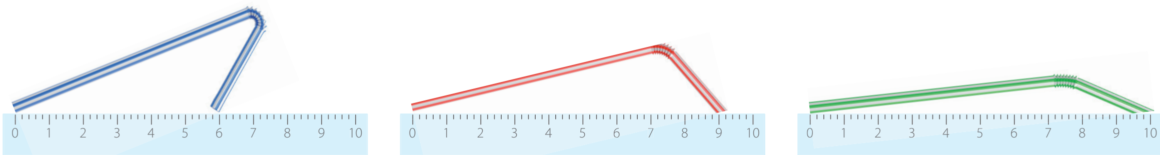
A) 3 cm **B)** 10 cm **C)** 13 cm **D)** 15 cm

5. Ayşe, iki kenarının uzunluğu 17 cm ve 10 cm olan üçgen şeklindeki bir kumaşın etrafına dantel geçirecektir. Ayşe'nin kullandığı dantelin uzunluğu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 28 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 60

5.1.3. Üçgenin Kenar Uzunlukları ile Açı Ölçüleri Arasındaki İlişki

Cetvel ve körüklü pipetten yararlanarak açılar oluşturalım. Cetveli düz bir zemine koyalım. Körüklü pipetin bir ucunu cetvelin 0 noktasına sabitleyelim. Pipeti körük yerinden açıp kapatarak üçgenler oluşturalım. Oluşan üçgenlerde körüğün oluşturduğu açının ölçüsü ile karşısındaki kenarın uzunluğu arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

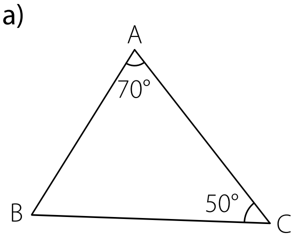


Yukarıdaki resimlerde görüldüğü gibi açının ölçüsü küçüldükçe karşısındaki kenarın uzunluğu da küçülür, açının ölçüsü büyüdükçe karşısındaki kenarın uzunluğu da büyür.

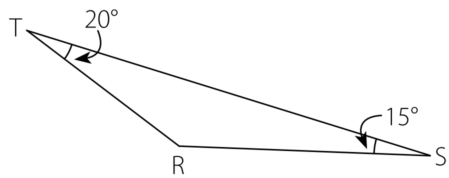
1. Örnek

Aşağıdaki üçgenlerin kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım.

a)



b)



Bilgi Kutusu

Bir üçgende küçük açı karşısında kısa kenar, büyük açı karşısında uzun kenar vardır.

Çözüm

Üçgenlerin açı ölçülerini bulup sıralayalım. Açı ölçüleri arasındaki sıralama kenar uzunlukları arasında da vardır.

Bir üçgenin iç açı ölçülerinin toplamı 180°dir.

a) $50° + 70° + m(\widehat{B}) = 180°$

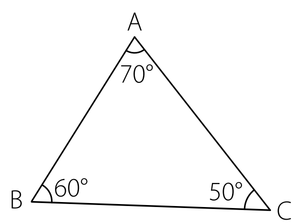
$120° + m(\widehat{B}) = 180°$

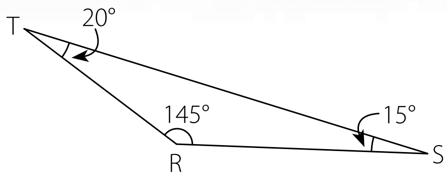
$m(\widehat{B}) = 180° - 120°$

$m(\widehat{B}) = 60°$

$m(\widehat{C}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{A})$

$|AB| < |AC| < |BC|$ olur.



b) 

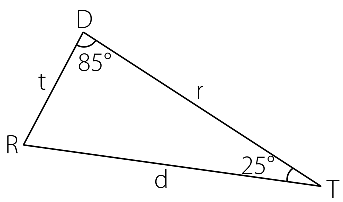
$$20° + 15° + m(\widehat{R}) = 180°$$
$$35° + m(\widehat{R}) = 180°$$
$$m(\widehat{R}) = 180° - 35°$$
$$m(\widehat{R}) = 145°$$

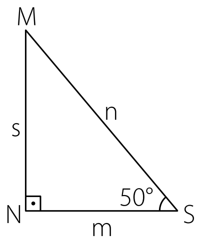
$m(\widehat{S}) < m(\widehat{T}) < m(\widehat{R})$

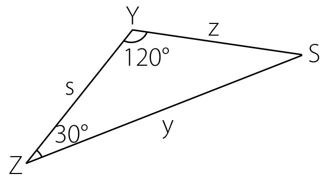
$|TR| < |RS| < |TS|$ olur.

Sıra Sizde

Aşağıdaki üçgenlerin kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

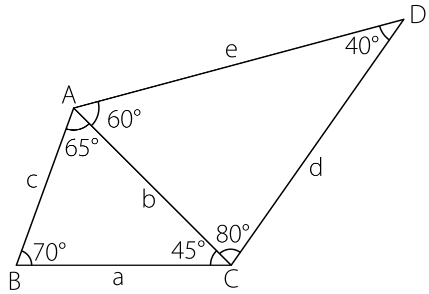
a) 

b) 

c) 

2. Örnek

Aşağıdaki şeklin en kısa ve en uzun kenarını belirleyelim.



Çözüm

Şekildeki ABC ve ACD üçgenlerinin kenar uzunluklarını ayrı ayrı sıralayalım. Sonra da ortak kenar uzunluğunu dikkate alarak en kısa ve en uzun kenarları belirleyelim.

$\widehat{ABC} \rightarrow c < a < b$	En uzun kenar: b	En kısa kenar: c
$\widehat{ACD} \rightarrow b < d < e$	En uzun kenar: e	En kısa kenar: b

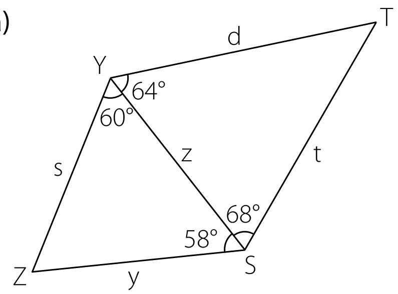
O hâlde her iki üçgende ortak olan b uzunluğuna göre;

$c < a < b < d < e$'dir. Buna göre şeklin en uzun kenarı e, en kısa kenarı c olur.

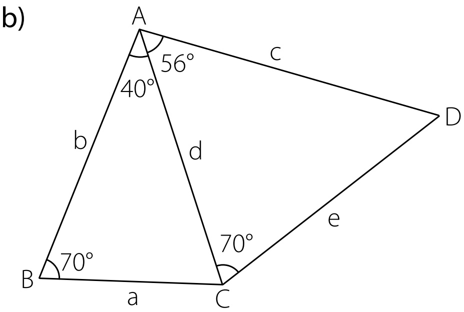
Sıra Sizde

Aşağıdaki şekillerin en kısa ve en uzun kenarlarını belirleyiniz.

a)

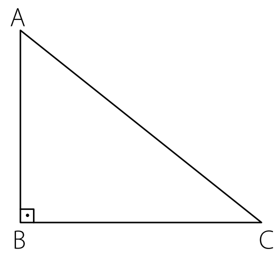


b)



Dik Üçgen

Bir açısı 90° (dik açı) olan üçgenlere **dik üçgen** denir. Dik üçgende birbirine dik olan kenarlara **dik kenarlar**, dik açının karşısındaki kenara ise **hipotenüs** denir. Dolayısıyla en uzun kenar hipotenüstür. Buna göre yanda verilen üçgende;

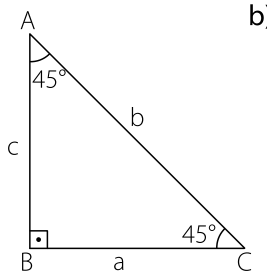


[AB] ve [BC] dik kenarlar, [AC] hipotenüstür.

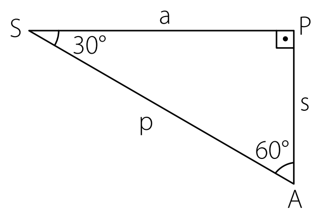
3. Örnek

Aşağıdaki dik üçgenlerde dik kenarları ve hipotenüsü belirleyelim, bu üçgenlerin kenar uzunluklarını sıralayalım.

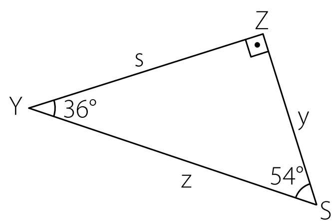
a)



b)



c)



Çözüm

a) ABC dik üçgeninde [AB] ve [BC] dik kenarlar, [AC] hipotenüstür. $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ olduğundan $a = c < b$ olur.

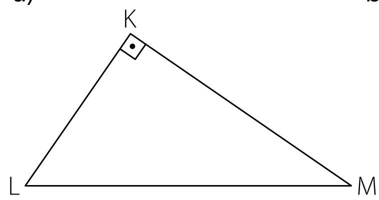
b) SPA dik üçgeninde [SP] ve [PA] dik kenarlar, [SA] hipotenüstür. $m(\widehat{S}) < m(\widehat{A})$ olduğundan $s < a < p$ olur.

c) YZS dik üçgeninde [ZY] ve [ZS] dik kenarlar, [YS] hipotenüstür. $m(\widehat{Y}) < m(\widehat{S})$ olduğundan $y < s < z$ olur.

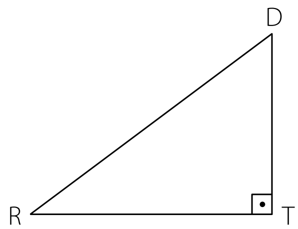
Sıra Sizde

Aşağıdaki dik üçgenlerde dik kenarları ve hipotenüsü belirleyiniz.

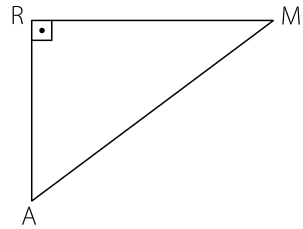
a)



b)



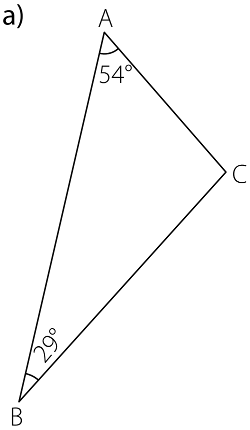
c)



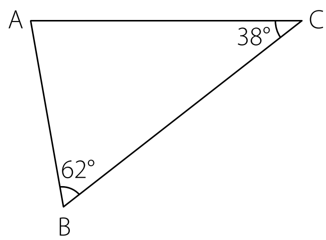
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen üçgenlerin kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

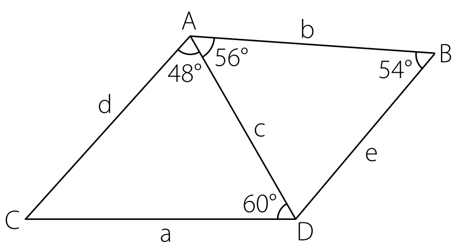
a)



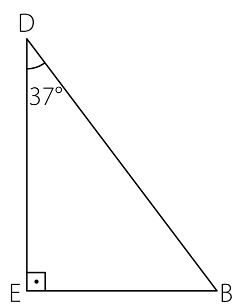
b)



2. Aşağıdaki şeklin en uzun ve en kısa kenarını belirleyiniz.



3. Yandaki dik üçgenin kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.



5.1.4. Üçgen Çizme

Cetvel, iletki ve pergel yardımıyla;

1. Üç kenar uzunluğu verilen üçgen çizilebilir.

2. İki kenar uzunluğu ile bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü verilen üçgen çizilebilir.

3. Bir kenar uzunluğu ile bu kenarın iki ucundaki açılarının ölçüsü verilen üçgen çizilebilir.

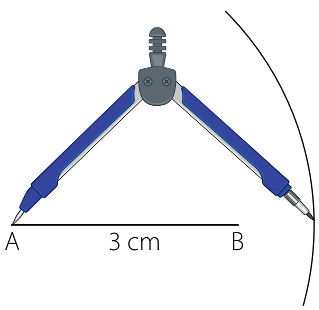
1. Örnek

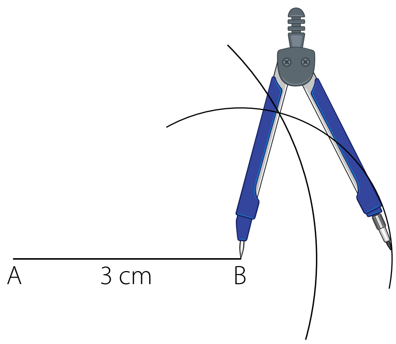
Kenar uzunlukları 3 cm, 4 cm ve 2 cm olan üçgeni cetvel ve pergel yardımıyla çizelim.

Çözüm

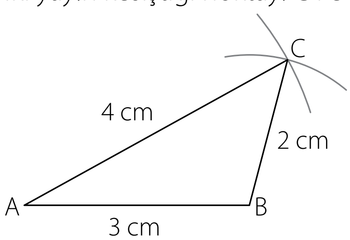
Önce 3 cm'lik bir doğru parçası çizelim.

Pergeli 4 cm uzunluğunda açalım. Pergelin sivri ucunu A noktasına koyarak bir yay çizelim. Sonra pergeli 2 cm uzunluğunda açalım. Pergelin sivri ucunu B noktasına koyarak bir yay çizelim.





İki yayın kesiştiği noktayı C ile isimlendirelim. A ile C ve B ile C noktalarını birleştirelim.



Böylece üç kenar uzunluğu verilen üçgeni çizmiş olduk.

Sıra Sizde

Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenleri cetvel ve pergel yardımıyla çiziniz.

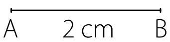
a) 7 cm, 9 cm, 10 cm **b)** 3 cm, 5 cm, 6 cm **c)** 6 cm, 8 cm, 10 cm

2. Örnek

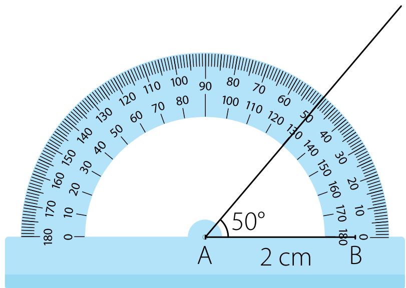
Kenar uzunluklarından biri 2 cm, diğeri 3 cm ve bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü 50° olan üçgeni iletki ve pergel yardımıyla çizelim.

Çözüm

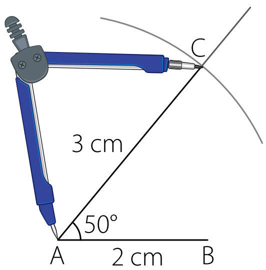
Önce 2 cm'lik bir doğru parçası çizelim.



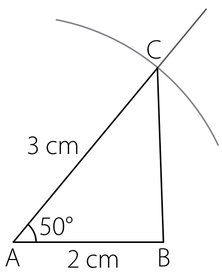
İletkiyi A noktasına koyalım ve 50°lik açı çizelim.



Pergeli 3 cm açalım. Pergelin sivri ucunu A noktasına koyarak bir yay çizelim. Yayla açının kolunun kesiştiği noktaya C diyelim.



B ve C noktalarını birleştirelim.



Böylece iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü verilen üçgeni çizmiş olduk.

Sıra Sizde

Aşağıda, iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü verilen üçgenleri cetvel ve iletki yardımıyla çiziniz.

a) 3 cm, 4 cm, 90° **b)** 7 cm, 6 cm, 50° **c)** 6 cm, 6 cm, 120°

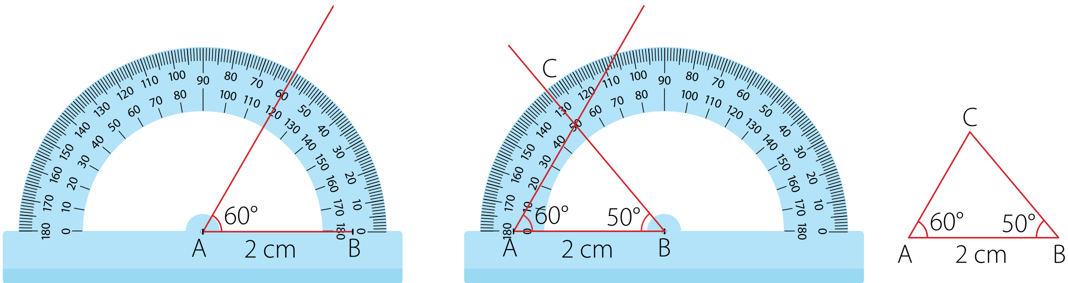
3. Örnek

Bir kenarının uzunluğu 2 cm, bu kenarın iki ucundaki açılarının ölçüsü 50° ve 60° olan üçgeni cetvel ve iletki yardımıyla çizelim.

Çözüm

Önce 2 cm uzunluğunda bir doğru parçası çizelim.

İletkiyle A noktasından 60°lik, B noktasından 50°lik açı çizelim. İki ışının kesiştiği noktaya C diyelim. A ve B noktalarını C noktası ile birleştirelim.



O hâlde bir kenar uzunluğu ve bu kenarın iki ucundaki açılarının ölçüsü verilen üçgeni çizdik.

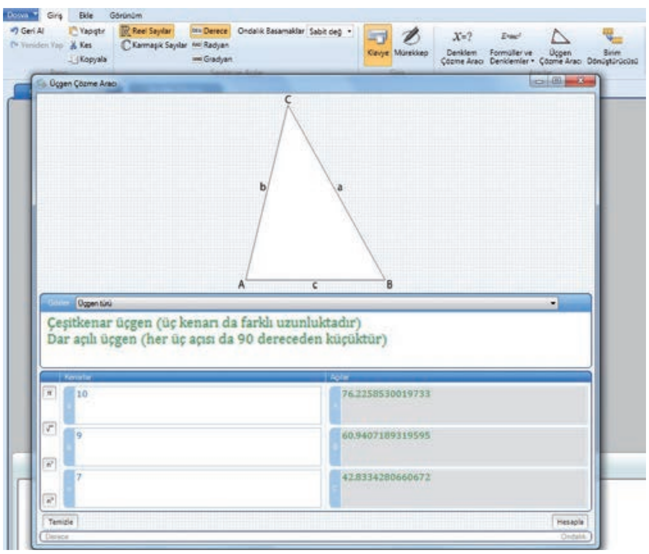
Sıra Sizde

Aşağıda, bir kenarının uzunluğu ve bu kenarın iki ucundaki açılarının ölçüsü verilen üçgenleri, cetvel ve iletki yardımıyla çiziniz.

a) 7 cm, 45°, 65° **b)** 5 cm, 50°, 55° **c)** 6 cm, 110°, 35°

4. Örnek

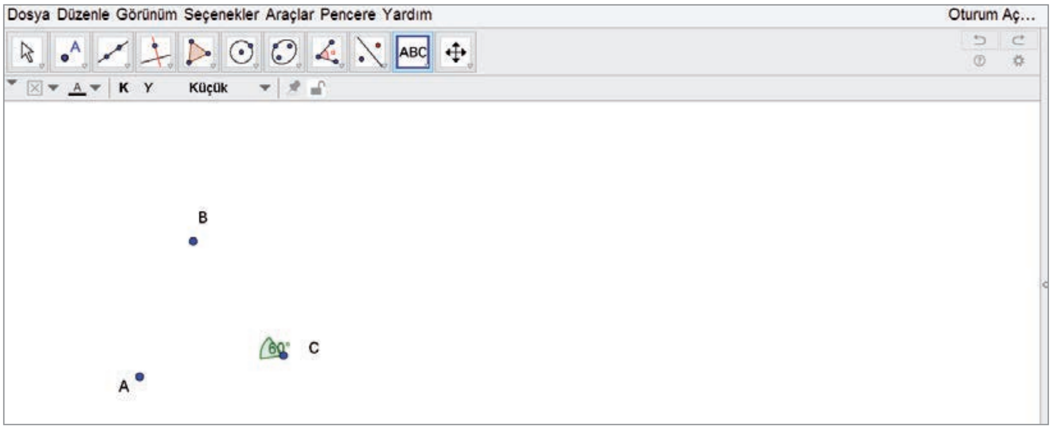
Bir dinamik geometri yazılımı edinelim. Üçgen çizimleri yapılan "Üçgen Çözme Aracı" butonuna tıklayalım. Üç kenar uzunluğunu 10, 9 ve 7 cm olarak yazalım.



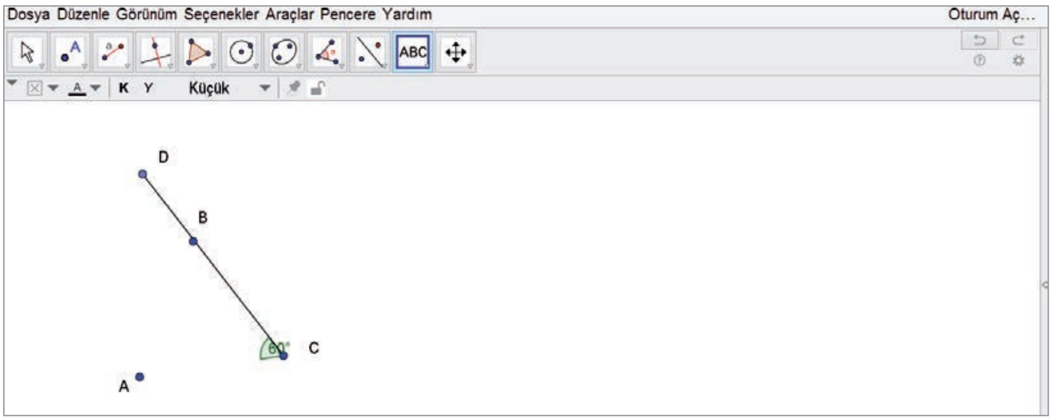
Kenar uzunlukları 10, 9 ve 7 cm olan bir üçgen çizilebilir.

5. Örnek

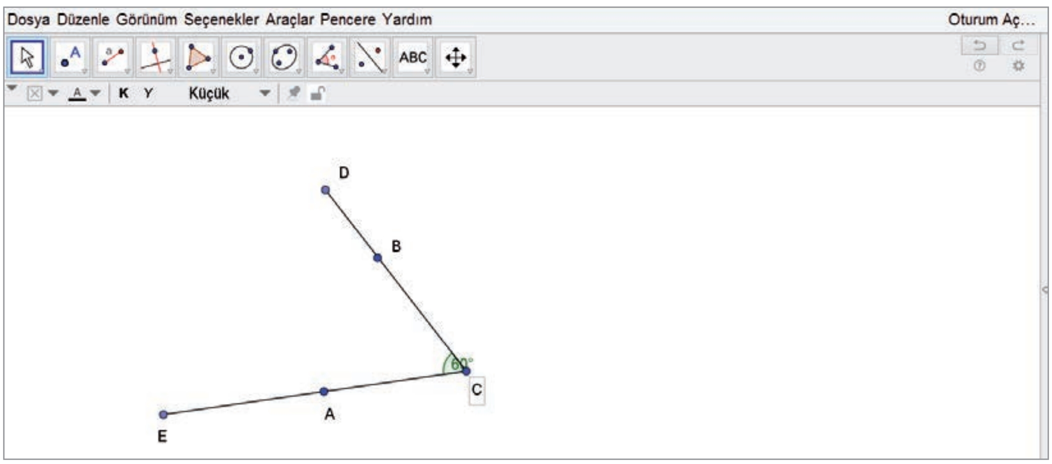
Bir dinamik geometri yazılımı edinelim. "Verilen ölçüde açı" sekmesinden yararlanarak iki nokta belirleyip açı ölçüsüne 60 yazalım. "Metin" sekmesinden bu noktalara isim verebilirsiniz.



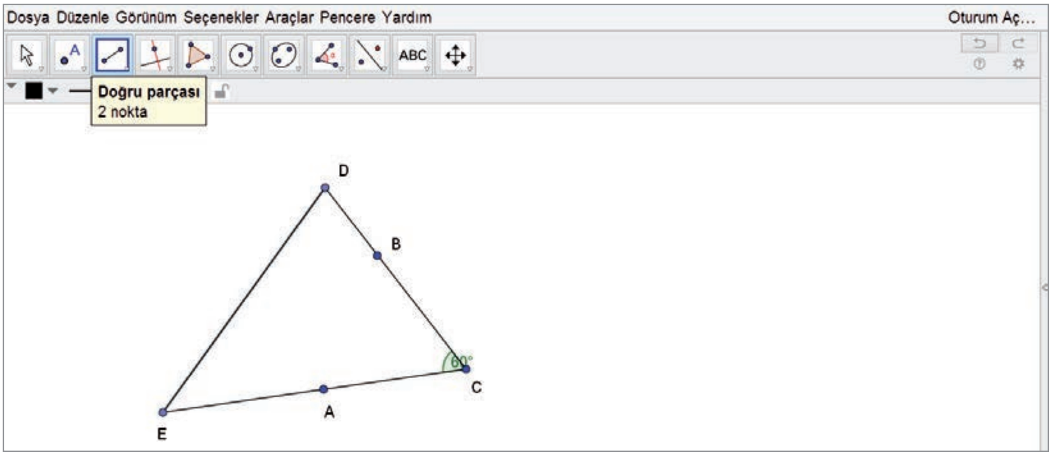
"Verilen uzunlukta doğru parçası" sekmesinden yararlanarak bir noktası açının köşesi olan C noktasından 6 birimlik bir doğru parçası çizelim. Doğru parçasının bitim noktasına da isim verebilirsiniz.



Aynı şekilde bir noktası açının köşesi olan 8 birimlik başka bir doğru parçası çizelim.



"Doğru parçası" sekmesinden yararlanarak başlangıç noktası E, bitiş noktası D olan bir doğru parçası çizelim.



C açısının ölçüsü 60°, bu açıyı oluşturan kenar uzunlukları 6 birim ve 8 birim olan bir üçgen çizilmiş oldu.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıda verilen kenar uzunlukları ve açı ölçülerinin hangileriyle üçgen çizilebilir? Belirleyiniz.

   a) 30°, 45°, 60° **b)** 48°, 72°, 60°

   c) 5 cm, 10 cm, 9 cm **ç)** 4 cm, 9 cm, 8 cm

2. Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenleri çiziniz.

   a) 5 cm, 6 cm, 7 cm **b)** 12 cm, 10 cm, 8 cm

3. Aşağıda bir kenar uzunluğu ve bu kenarın iki ucundaki açılarının ölçüleri verilen üçgenleri çiziniz.

   a) 5 cm, 48°, 62° **b)** 8 cm, 70°, 40°

4. Aşağıda iki kenar uzunluğu ve bu iki kenar arasındaki açısının ölçüsü verilen üçgenleri çiziniz.

   a) 4 cm, 6 cm, 40° **b)** 5 cm, 8 cm, 110°

5. Dinamik geometri yazılım programını kullanarak aşağıdaki üçgenleri çiziniz.

   a) $\widehat{ABC}$ 'nde; $|AB| = 5$ br, $|AC| = 7$ br, $m(\widehat{A}) = 30°$

   b) $\widehat{NMK}$ 'nde; $|MN| = 5$br, $|NK| = 10$ br, $|MK| = 8$ br

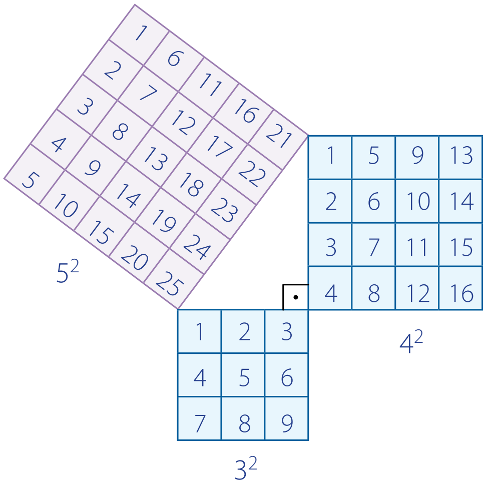
   c) $\widehat{KLM}$ 'nde; $m(\widehat{K}) = 75°$, $m(\widehat{L}) = 38°$, $|KL| = 4$ br

   ç) $\widehat{PRS}$ 'nde; $m(\widehat{P}) = 132°$, $|PR| = 4$br, $|PS| = 9$ br

5.1.5. Pisagor Bağıntısı

Pisagor bağıntısı, dik üçgenlerin kenar uzunlukları arasında bir bağıntıdır. Pisagor tarafından bulunan bu bağıntı bilinen en eski bağıntılardandır.

Karesel bölgeler yardımıyla bir dik üçgen oluşturalım. Bu dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi belirleyelim.



Oluşan dik üçgenin kenar uzunlukları 3 br, 4 br ve 5 br'dir. Bu kenarlardan 3 br ve 4 br olanlar dik kenarlar, 5 br olan hipotenüstür. Karesel bölgelerin alanlarını yazdığımızda;

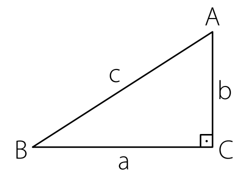
$3^2 + 4^2 = 5^2$

$9 + 16 = 25$

$25 = 25$ eşitliği bulunur.

Bilgi Kutusu

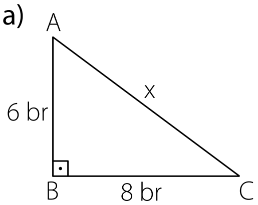
Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Bu bağıntıya, ***Pisagor bağıntısı*** *denir.*

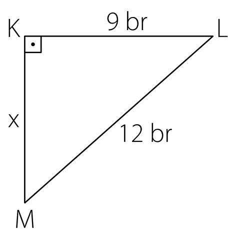


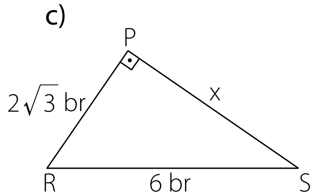
$a^2 + b^2 = c^2$

1. Örnek

Aşağıdaki dik üçgenlerin verilmeyen kenar uzunluklarını bulalım.

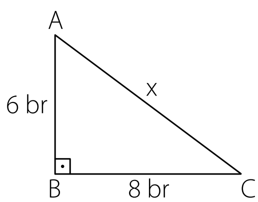
a)


b)


c)


Çözüm

Her üçgende Pisagor bağıntısını yazarak üçgenlerin verilmeyen kenar uzunluklarını bulalım.

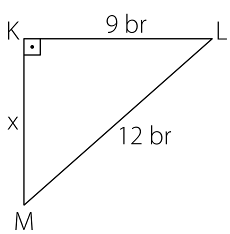
a)


$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$6^2 + 8^2 = x^2$

$36 + 64 = x^2$

$100 = x^2$ ise $x = 10$ br olur.

b)


$|KL|^2 + |KM|^2 = |LM|^2$

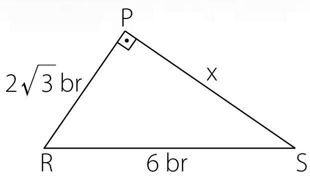
$9^2 + x^2 = 12^2$

$81 + x^2 = 144$

$x^2 = 144 - 81$

$x^2 = 63$ ise $x = \sqrt{63}$ br olur.

c)



$|PR|^2 + |PS|^2 = |RS|^2$

$(2\sqrt{3})^2 + x^2 = 6^2$

$4 \cdot 3 + x^2 = 36$

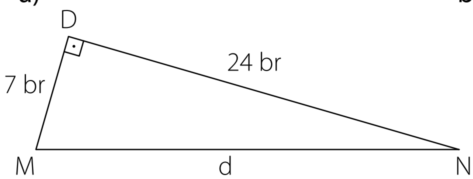
$x^2 = 36 - 12$

$x^2 = 24$ ise $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ br olur.

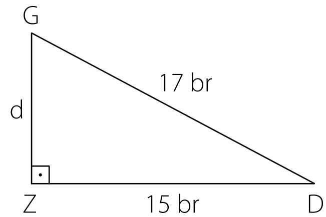
Sıra Sizde

Aşağıdaki dik üçgenlerin verilmeyen kenar uzunluklarını bulunuz.

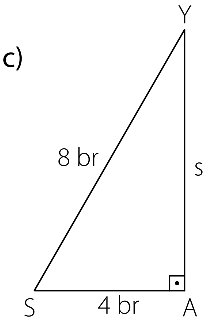
a)



b)



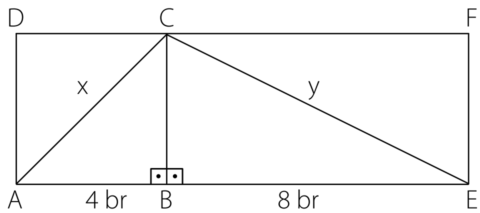
c)



2. Örnek

Yandaki şekilde ABCD kare ve BEFC dikdörtgendir.

$|AB| = 4$ br ve $|BE| = 8$ br olduğuna göre x ve y değerlerini bulalım.



Çözüm

ABCD kare ise $|AB| = |BC| = 4$ ve $[AB] \perp [BC]$'dir. BEFC dikdörtgen ise $[BC] \perp [BE]$'dir. Buna göre ABC ve CBE dik üçgenlerinde Pisagor bağıntısını kullanarak x ve y değerlerini bulalım.

$\widehat{ABC}$ için $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$4^2 + 4^2 = x^2$

$16 + 16 = x^2$

$32 = x^2$ ise $x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ br bulunur.

$\widehat{CBE}$ için $|CB|^2 + |BE|^2 = |CE|^2$

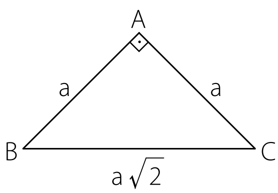
$4^2 + 8^2 = y^2$

$16 + 64 = y^2$

$80 = y^2$ ise $y = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ br bulunur.

Bilgi Kutusu

İkizkenar dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu dik kenar uzunluğunun, $\sqrt{2}$ katıdır.

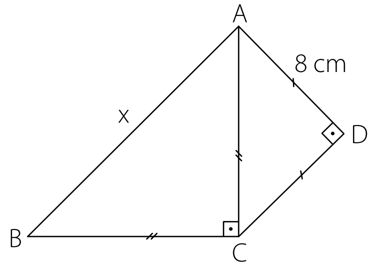


Karenin köşegen uzunluğu, kenar uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır.

4. Örnek

Yandaki şekilde [BC] $\perp$ [AC], [AD] $\perp$ [DC]'dır.

|AC| = |BC| ve |AD| = |DC| = 8 cm ise |AB| = x uzunluğunu bulalım.



Çözüm

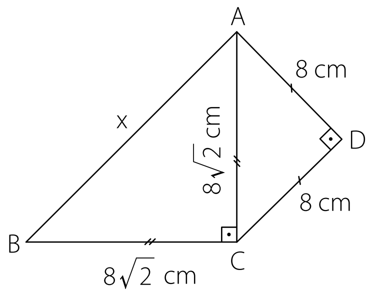
Dik üçgenlerde sırayla Pisagor bağıntısını uygulayarak x değerini bulalım.

|AD| = |DC| ise ADC ikizkenar dik üçgen olduğundan;

$|AC| = 8\sqrt{2}$ cm olur.

ABC ikizkenar dik üçgen olduğundan;

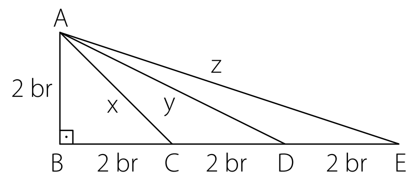
$$|AC| = |BC| = 8\sqrt{2} \text{ ise } |AB| = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$
$$= 8 \cdot 2$$
$$= 16 \text{ cm bulunur.}$$



5. Örnek

Yandaki şekilde B, C, D, E noktaları doğrusaldır.
[AB] $\perp$ [BE] ve |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = 2 br'dir.

Buna göre x · y · z değerini bulalım.



Çözüm

ABC, ABD ve ABE dik üçgenlerinde Pisagor bağıntısını kullanarak x, y, z değerlerini bulalım.

ABC ikizkenar dik üçgendir.

|AB| = |BC| = 2 br olduğundan $|AC| = 2 \cdot \sqrt{2}$ br olur.

$|AC| = \sqrt{8}$ br'dir.

$\overset{\frown}{ABD}$ için $|AB|^2 + |BD|^2 = |AD|^2$

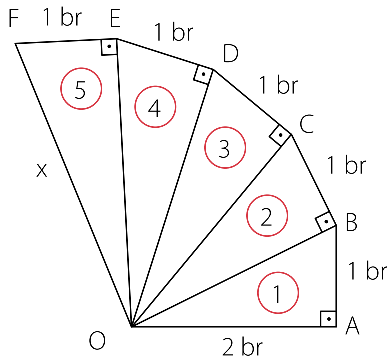
$$2^2 + 4^2 = y^2$$
$$4 + 16 = y^2$$
$$20 = y^2 \text{ ise } y = \sqrt{20} \text{ br'dir.}$$

$\overset{\frown}{ABE}$ için $|AB|^2 + |BE|^2 = |AE|^2$

$$2^2 + 6^2 = z^2$$
$$4 + 36 = z^2$$
$$40 = z^2 \text{ ise } z = \sqrt{40} \text{ br'dir.}$$

$$x \cdot y \cdot z = \sqrt{8} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{40}$$
$$= \sqrt{8 \cdot 20 \cdot 40}$$
$$= \sqrt{6400} = 80 \text{ br}^3 \text{ bulunur.}$$

6. Örnek



Yandaki şekilde;

[OA] ⊥ [AB], [OB] ⊥ [BC], [OC] ⊥ [CD],

[OD] ⊥ [DE] ve [OE] ⊥ [EF]'dır.

|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = 1 br ve |OA| = 2 br

olduğuna göre |OF| = x'in uzunluğunu bulalım.

Çözüm

Şekilde bir üçgenin hipotenüsü diğer üçgenin dik kenarıdır. Ayrıca, şekilde bu ilişkiyi barındıran 5 dik üçgen vardır. Sırasıyla AOB, BOC, COD, DOE ve EOF dik üçgenlerinden yararlanarak x'i bulalım.

1 $\rightarrow$ $2^2 + 1^2 = |OB|^2$

$4 + 1 = |OB|^2$ ise $|OB| = \sqrt{5}$ br'dir.

2 $\rightarrow$ $(\sqrt{5})^2 + 1^2 = |OC|^2$

$5 + 1 = |OC|^2$ ise $|OC| = \sqrt{6}$ br'dir.

3 $\rightarrow$ $(\sqrt{6})^2 + 1^2 = |OD|^2$

$6 + 1 = |OD|^2$ ise $|OD| = \sqrt{7}$ br'dir.

4 $\rightarrow$ $(\sqrt{7})^2 + 1^2 = |OE|^2$

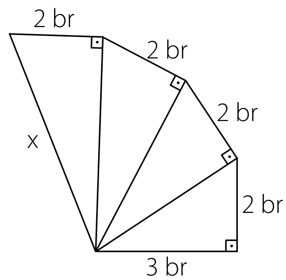
$7 + 1 = |OE|^2$ ise $|OE| = \sqrt{8}$ br'dir.

5 $\rightarrow$ $(\sqrt{8})^2 + 1^2 = |OF|^2$

$8 + 1 = x^2$ ise $x = \sqrt{9} = 3$ br'dir.

Sıra Sizde

Yandaki şekilde verilenlere göre x kaç birimdir?



7. Örnek

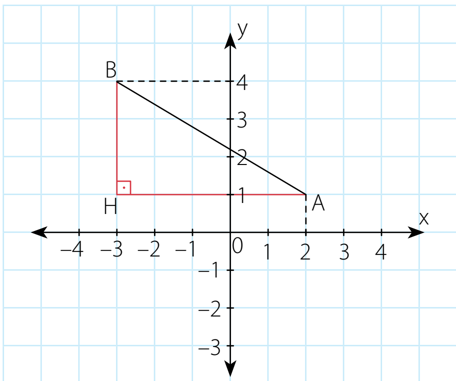
Koordinat sisteminde A(2, 1) ve B(–3, 4) noktaları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulalım.

Çözüm

Noktaları koordinat sisteminde gösterelim. Noktaları birleştirerek [AB]'nı elde edelim.

[AB]'nın uzunluğunu bulmak için dik üçgen ve Pisagor bağıntısından yararlanalım.

[AB] hipotenüs olacak şekilde dik bir üçgen çizelim. Böylece BHA dik üçgenini elde edelim.



Şimdi $\widehat{BHA}$ 'nin dik kenarlarının uzunluklarını bulalım.

$|BH| = 3$ br $\quad |HA| = 5$ br

$\widehat{BHA}$ 'nde Pisagor bağıntısını kullanarak;

$$|BH|^2 + |HA|^2 = |BA|^2$$

$$3^2 + 5^2 = |BA|^2$$

$$9 + 25 = |BA|^2$$

$34 = |BA|^2$ ise $|BA| = \sqrt{34}$ br olur.

Sıra Sizde

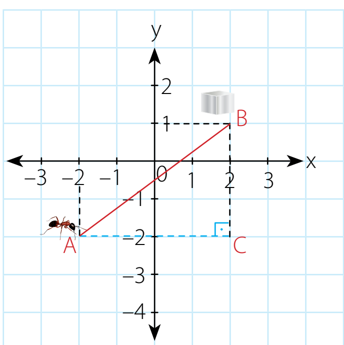
Koordinat düzleminde P(3, 2) ve Y(–1, 4) noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

8. Örnek

A(–2, –2) noktasındaki karınca, B(2, 1) noktasında bulunan şekerin yanına gitmek istiyor. Karıncanın alacağı en kısa yolun kaç birim olduğunu bulalım.

Çözüm

Karınca ve şekerin bulunduğu yerleri koordinat sisteminde gösterelim. Noktaları birleştirerek [AB]'nı çizelim. Karınca [AB]'nın üzerinde giderse şekere en kısa yoldan ulaşabilir. [AB]'sının uzunluğunu bulalım.



Şimdi $\widehat{ACB}$ 'nin dik kenarlarının uzunluklarını bulalım.

$|AC| = 4$ br $\quad |BC| = 3$ br

$\widehat{ACB}$ 'nde Pisagor bağıntısını kullanarak;

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

$$4^2 + 3^2 = |AB|^2$$

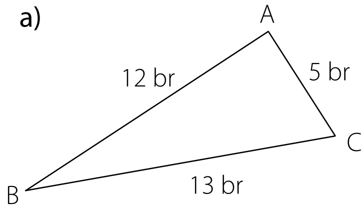
$$16 + 9 = |AB|^2$$

$25 = |AB|^2$ ise $|AB| = 5$ br olur.

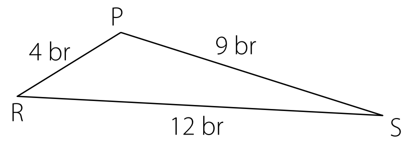
8. Örnek

Kenar uzunlukları verilen aşağıdaki üçgenlerin dik üçgen olup olmadıklarını belirleyelim.

a)



b)

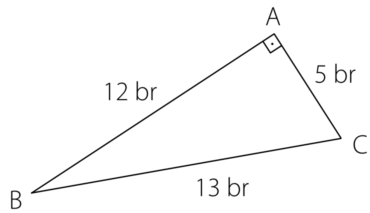


Çözüm

Dik üçgende en uzun kenar hipotenüstür. Ayrıca verilen üçgenlerin kenar uzunluklarına Pisagor bağıntısını uyguladığımızda eşitliğin doğru olup olmadığına bakalım.

a)

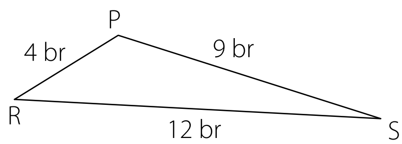
Dik kenarlar		Hipotenüs
$5^2 + 12^2$		13^2
$25 + 144$		
169	$=$	169



O hâlde ABC dik üçgendir. [BC] hipotenüs ve [AB], [AC] dik kenarlardır.

b)

Dik kenarlar		Hipotenüs
$4^2 + 9^2$		12^2
$16 + 81$		144
97	$\neq$	144



PRS dik üçgen değildir.

Sıra Sizde

Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenlerden hangisi ya da hangileri dik üçgendir? Belirleyiniz.

a) 2 cm, 5 cm, 4 cm

b) 6 cm, 8 cm, 9 cm

c) 14 cm, 48 cm, 25 cm

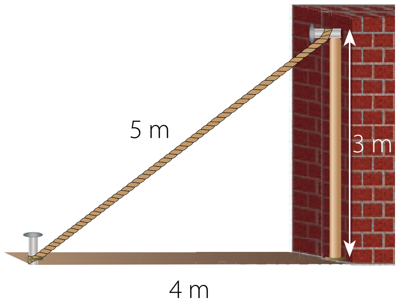
ç) 9 cm, 12 cm, 15 cm

9. Örnek

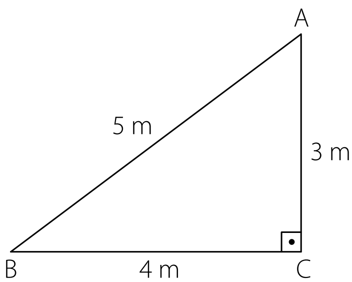
5 m ip, iki çivi, metre ve çekiç kullanıldığında bir sırığın yere dik olacak biçimde nasıl dikilebileceğini bulalım.

Çözüm

Sırığı yere dik (90°) olacak biçimde dikmek için 5 m ip, iki çivi, metre ve çekiç kullanılacaktır.



Sırığı dikmek için zeminde uygun bir çukur açalım. Sırığı çukurun içine yerleştirelim. Sırıktan 4 m uzağa bir çivi çakalım. Sırığın üzerine de yerden 3 m yükseğe (toprak seviyesinden) bir çivi çakalım. Çivilerin arasında 5 m kalacak şekilde ipi çivilere bağlayalım. Sırığı, ip gergin olacak biçimde kaldıralım. Böylece sırık, ip ve yere çakılan çivi bir üçgen oluşturur. Bu üçgen dik üçgen midir? Bakalım:



En uzun kenar AB kenarı olduğundan bu kenarı hipotenüs kabul edelim.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ (Pisagor bağıntısı)

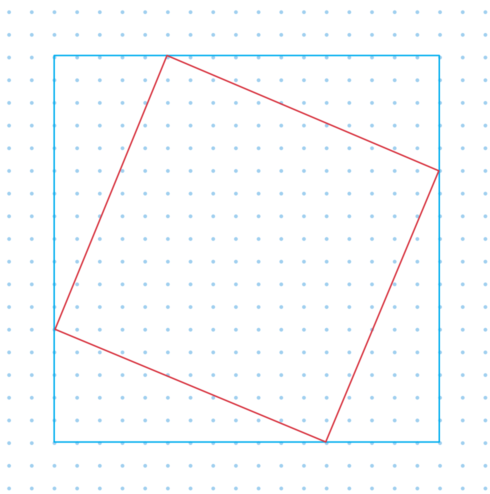
$9 + 16 = 25$

$25 = 25$

Eşitlik doğru olduğundan bu üçgen, bir dik üçgendir. Sırık yere diktir.

Etkinlik

Araç ve Gereç: noktalı kâğıt, cetvel, kalem



- Noktalı kâğıt üzerine kenar uzunluğu 17 cm olan bir kare çiziniz.
- Karenin köşelerine yandaki gibi kenar uzunlukları 5 ve 12 cm olan dik üçgenler çiziniz.
- Dik üçgenlerin ve büyük karenin alanlarından yararlanarak ortadaki karenin alanını bulunuz.
- Ortadaki karenin, kenar uzunluğunu alanından yararlanarak bulunuz.

✓ Oluşturduğunuz dik üçgenlerin kenar uzunlukları arasında Pisagor bağıntısı olup olmadığını test ediniz.

1. Problem

Şebnem, evdeki merdivenin altında bulunan boşluğa çocukların önerilerine uyarak raf yaptıracaktır. Merdivenin uzunluğu 3,5 m, merdivenin altına yaptırdıkları kitap rafının uzunluğu ise 2,8 m'dir. A ve B noktası arasındaki uzaklık kaç m'dir?

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

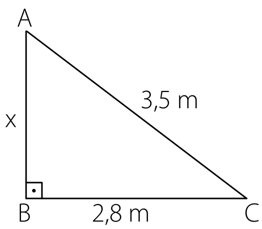
- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve isteneni belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Merdivenin uzunluğu: 3,5 m Rafın uzunluğu: 2,8 m	$\|AB\| = x = ?$

- Problemi özet olarak yazalım.

Merdivenin uzunluğu	Rafın uzunluğu	Raf ile merdiven arasındaki uzaklık
3,5 m	2,8 m	?

- Problemin şemasını çizelim.



2. Çözümü Planlayalım

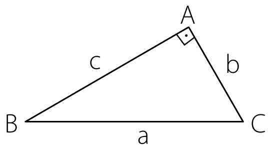
- Problemi çözmek için hangi matematik işlemini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  Bir dik üçgen oluştuğundan, problemi Pisagor bağıntısından yararlanarak çözebiliriz. Bunun için çarpma ve çıkarma işlemlerini kullanırız.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

  $(3{,}5)^2 - (2{,}8)^2 = x^2$

Bilgi Kutusu



$a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

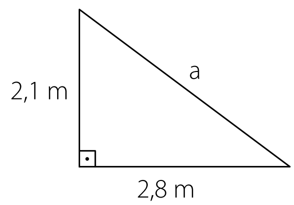
$$(3{,}5)^2 - (2{,}8)^2 = x^2$$
$$12{,}25 - 7{,}84 = x^2$$
$$4{,}41 = x^2$$
$$x = \sqrt{4{,}41}$$
$$x = 2{,}1 \text{ m}$$

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

İşlemi tersten yapalım.

$(2{,}1)^2 + (2{,}8)^2 = a^2$ olsun. (a: merdivenin uzunluğu)

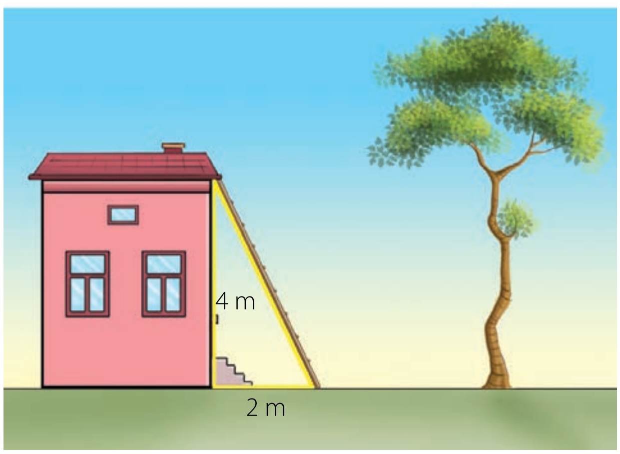


$$4{,}41 + 7{,}84 = a^2$$
$$12{,}25 = a^2$$
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{12{,}25} = \sqrt{\frac{1225}{100}} = \frac{35}{10} = 3{,}5 \text{ m} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda, bulunan sonuç doğrudur.

2. Problem

4 m yüksekliğindeki bir eve, yandaki resimde görüldüğü gibi bir merdiven dayanmıştır. Merdivenin yerdeki ucu evden 2 m uzaklıktadır. Bahçedeki ağacın yüksekliği ise merdivenin uzunluğunun $2\sqrt{5}$ katıdır. Ağacın yüksekliği ne kadardır?



Çözüm

1. Problemi Anlayalım

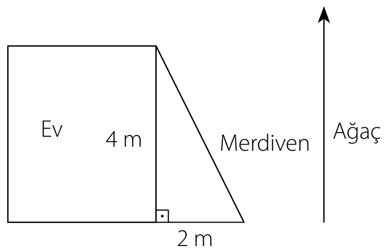
- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve isteneni belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Evin yüksekliği: 4 m Evle merdiven arasındaki uzaklık: 2 m Ağacın yüksekliği merdivenin uzunluğunun $2\sqrt{5}$ katı	Ağacın yüksekliği: ?

- Problemi özet olarak yazalım.

Evin yüksekliği	Evle merdiven arasındaki uzaklık	Merdivenin uzunluğu	Ağacın yüksekliğinin, merdivenin uzunluğunun kaç katı olduğu	Ağacın yüksekliği
4 m	2 m	?	$2\sqrt{5}$ kat	?

- Problemin şemasını çizelim.



2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  Bir dik üçgen oluştuğu için problemi Pisagor bağıntısından yararlanarak çözebiliriz. Ağacın yüksekliğini bulmak için çarpma işlemi kullanırız.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

  $4^2 + 2^2 = \triangle^2$

  $\triangle \cdot 2\sqrt{5} = \square$

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

  $4^2 + 2^2 = x^2$

  $16 + 4 = x^2$

  $20 = x^2$

  $\sqrt{4 \cdot 5} = x$

  $2\sqrt{5} = x$

  Merdivenin yüksekliği $2\sqrt{5}$ m bulunur. Ağacın yüksekliği merdivenin yüksekliğinin $2\sqrt{5}$ katı olduğuna göre; ağacın yüksekliği $2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 4 \cdot 5 = 20$ m'dir.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım. İşlemi tersten yapalım.

Ağacın boyu 20 m olduğundan

$$\frac{20}{\underset{(\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}} = \frac{20\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

Merdivenin uzunluğu $2\sqrt{5}$ bulunur.

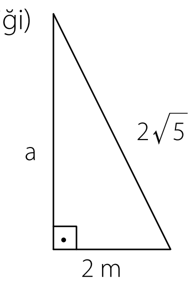
$(2\sqrt{5})^2 - 2^2 = a^2$ olsun. (a: evin yüksekliği)

$20 - 4 = a^2$

$16 = a^2$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{16}$

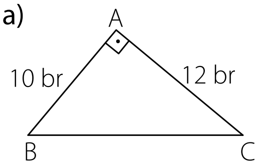
$a = 4$ m bulunur.

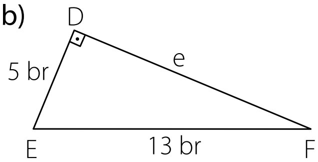


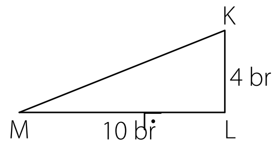
Bu durumda, bulunan sonuç doğrudur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

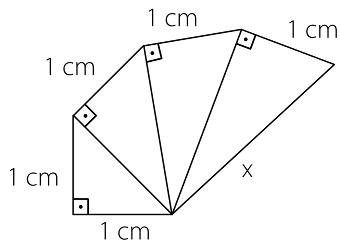
1. Aşağıdaki dik üçgenlerde verilmeyen uzunlukları hesaplayınız.

a)


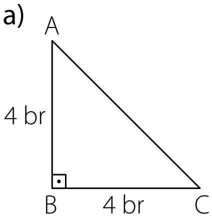
b)


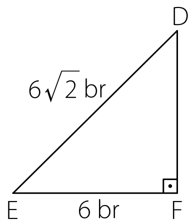
c)


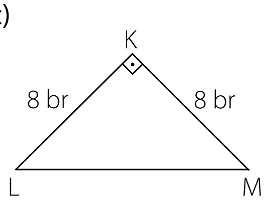
2. Şekilde verilenlere göre x kaç cm'dir?



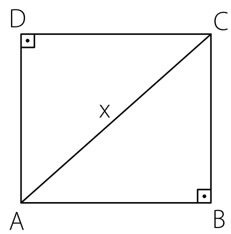
3. Aşağıdaki dik üçgenlerde verilmeyen uzunlukları bulunuz.

a)


b)


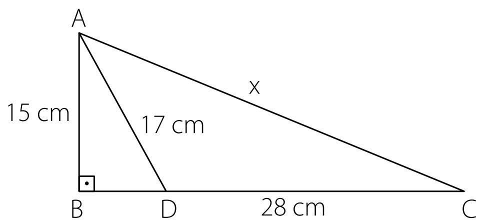
c)


4. Yandaki karenin alanı 81 cm^2 ise $|AC| = x$ kaç cm'dir?



7. Kenar uzunlukları 7 ve 12 cm olan dikdörtgenin köşegen uzunluğu kaç cm'dir?

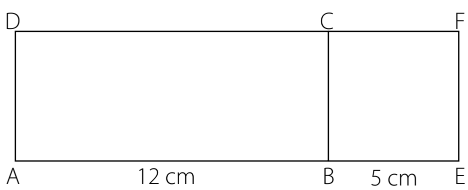
8. Yandaki ABC dik üçgeninde;
$|AB| = 15$ cm,
$|AD| = 17$ cm,
$|DC| = 28$ cm ise $|AC| = x$ kaç cm'dir?



9. Hipotenüsü $8\sqrt{2}$ cm olan ikizkenar dik üçgenin dik kenarlarının uzunluklarının toplamı kaç cm'dir?

10. Köşegen uzunluğu 10 cm olan karenin çevre uzunluğu kaç cm'dir?

11. ABCD dikdörtgen, BEFC karedir. Şekilde verilen uzunluklara göre AEFD dikdörtgenin köşegen uzunluğunu bulunuz.



5.2. Bölüm
Eşlik ve Benzerlik

Terimler veya Kavramlar

Benzerlik oranı

Kırkyama denen iş ile kumaş parçaları ya da örerek oluşturulan motifler birleştirilip çeşitli eşyalar üretilebilmektedir. Bunlar; yorgan yüzü, yatak örtüsü, battaniye, bebek elbisesi, şapka, atkı, çanta gibi eşyalardır. Kırkyama, isteğe göre değişik renk ve desenlerdeki kumaşlardan yapılabilir. Bu iş ile eş ve benzer geometrik şekilleri simetrik dizip birleştirerek çeşitli desenler ortaya çıkarmak mümkündür.

Semboller

- $\cong$ (eşlik)
- $\sim$ (benzerlik)

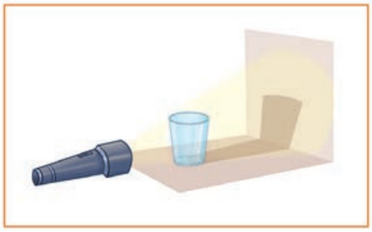
Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Eşlik ve benzerliği ilişkilendirme, eş ve benzer şekillerin kenar ve açı ilişkilerini belirleme*
- *Benzer çokgenlerin benzerlik oranlarını belirleme, bir çokgene eş ve benzer çokgenler oluşturma*

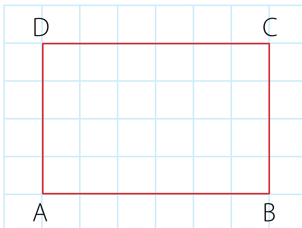
5.2.1. Eşlik ve Benzerlik, Eş ve Benzer Şekillerin Kenar ve Açı İlişkileri

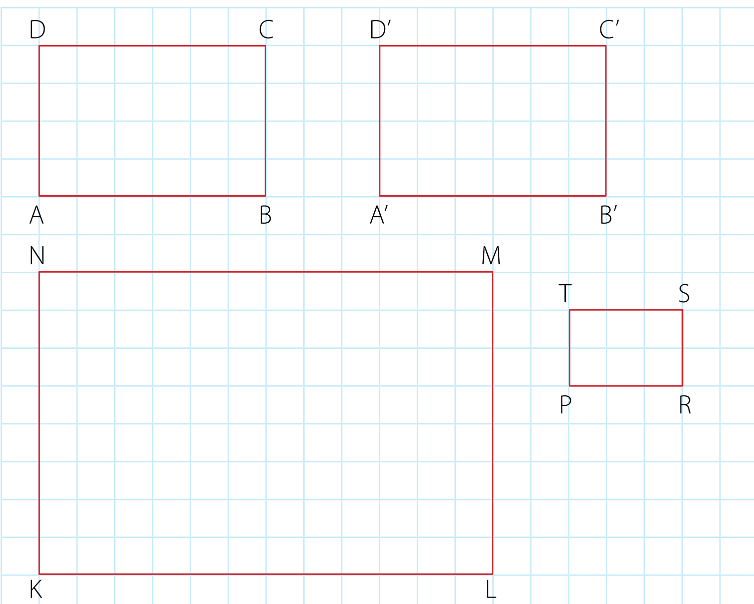
Aşağıda verilen bardak ile aynadaki görüntüsünü inceleyelim. Bardak ile aynadaki görüntüsü eştir. Çünkü bardak ile görüntüsündeki bütün ayrıtlar ve özellikler eştir.

Aşağıda, bir bardak ve bu bardağın duvardaki gölgesi verilmiştir. Duvardaki gölge, bardağın hemen hemen iki katı büyüklüğündedir. Bardak ile gölgesi benzerdir. Çünkü gölge, bardağın belirli bir ölçüye göre büyümüş hâlidir.



Yandaki kareli bölgede verilen dikdörtgene eş, bu dikdörtgenin 2 katı ve yarısı büyüklüğünde yeni dikdörtgenler çizelim.





ABCD ve A′B′C′D′ dikdörtgenleri eştir. Çünkü birbirine karşılık gelen kenar uzunlukları eşittir. ABCD $\cong$ A′B′C′D′ şeklinde ifade edilir.

Bilgi Kutusu

Açı ölçüleri ve kenar uzunlukları eşit olan şekiller eştir.

Açı ölçüleri eşit, kenar uzunlukları orantılı olan şekiller benzerdir.

Eş şekiller aynı zamanda benzerdir ancak benzer şekiller eş olmayabilir.

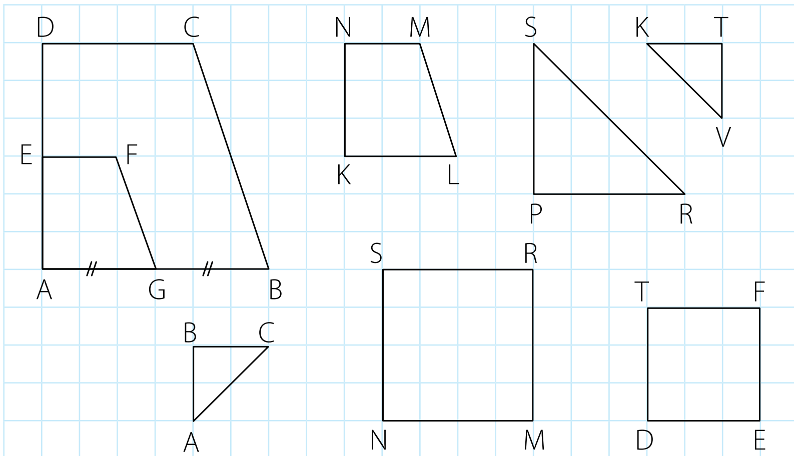
Eşlik, "$\cong$" sembolü ile; benzerlik ise "$\sim$" sembolleri ile gösterilir.

ABCD ve KLMN dikdörtgenleri benzerdir. Çünkü KLMN dikdörtgeninin kenar uzunlukları ile ABCD dikdörtgeninin birbirine karşılık gelen kenar uzunlukları orantılıdır (2 katı). Bu nedenle ABCD ~ KLMN'dir.

ABCD ve PRST dikdörtgenleri benzerdir. Çünkü PRST dikdörtgeninin kenar uzunlukları ile ABCD dikdörtgeninin birbirine karşılık gelen kenar uzunlukları orantılıdır (yarısı). ABCD ~ PRST

1. Örnek

Aşağıdaki noktalı bölgede verilen şekillerin eş ve benzer olanlarını belirleyelim.



Bilgi Kutusu

Şekillerin eşlik ya da benzerlik kuralları sembol kullanılarak yazılırken ölçüleri eşit olan açıları ve birbirine karşılık gelen kenar uzunlukları belirtilmelidir.

Çözüm

- AGFE ve ABCD dörtgenleri için;

  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{A})$ $\quad$ $2|AG| = |AB|$

  $m(\widehat{G}) = m(\widehat{B})$ $\quad$ $2|GF| = |BC|$

  $m(\widehat{F}) = m(\widehat{C})$ $\quad$ $2|FE| = |CD|$

  $m(\widehat{E}) = m(\widehat{D})$ $\quad$ $2|EA| = |DA|$

  olduğuna göre AGFE ve ABCD dörtgenlerinin birbirine karşılık gelen açı ölçüleri eşit, kenar uzunlukları orantılıdır. O hâlde;
  AGFE ~ ABCD'dur.

- AGFE ve KLMN dörtgenleri için;

  $m(\widehat{A}) = m(\widehat{K})$ $\quad$ $|AG| = |KL|$

  $m(\widehat{G}) = m(\widehat{L})$ $\quad$ $|GF| = |LM|$

  $m(\widehat{F}) = m(\widehat{M})$ $\quad$ $|FE| = |MN|$

  $m(\widehat{E}) = m(\widehat{N})$ $\quad$ $|EA| = |NK|$

  olduğuna göre AGFE ve KLMN dörtgenlerinin birbirine karşılık gelen açı ölçüleri ve kenar uzunlukları eşittir. O hâlde AGFE ≅ KLMN olur.
  AGFE ~ ABCD olduğundan KLMN ~ ABCD olur.

- $\widehat{PRS}$ ve $\widehat{TKV}$ için;

  $m(\widehat{P}) = m(\widehat{T})$ $\quad$ $|PR| = 2|TK|$

  $m(\widehat{R}) = m(\widehat{K})$ $\quad$ $|PS| = 2|TV|$

  $m(\widehat{S}) = m(\widehat{V})$ $\quad$ $|RS| = 2|KV|$

  olduğuna göre PRS ve TKV üçgenlerinin açı ölçüleri eşit, kenar uzunlukları orantılıdır. O hâlde $\widehat{PRS} \sim \widehat{TKV}$ olur.

- $\widehat{TKV}$ ve $\widehat{BAC}$ için;

  $m(\widehat{T}) = m(\widehat{B})$ $\quad$ $|TK| = |BA|$

  $m(\widehat{K}) = m(\widehat{A})$ $\quad$ $|KV| = |AC|$

  $m(\widehat{V}) = m(\widehat{C})$ $\quad$ $|TV| = |BC|$

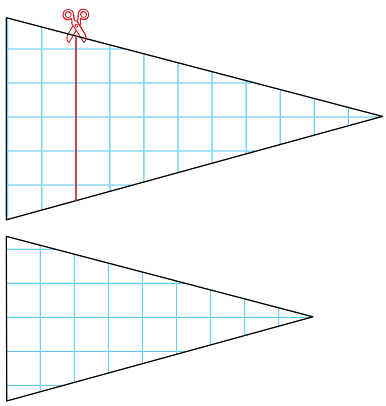
  olduğuna göre TKV ve BAC üçgenlerinin birbirine karşılık gelen açı ölçüleri ve kenar uzunlukları eşittir. O hâlde $\widehat{TKV} \cong \widehat{BAC}$'dir.

  $\widehat{TKV} \sim \widehat{PRS}$ olduğundan $\widehat{PRS} \sim \widehat{BAC}$ olur.

- DEFT ve NMRS kareleri benzerdir. Çünkü karenin tüm açı ölçüleri eşittir. Ayrıca kenar uzunlukları arasında $4|DE| = 3|NM|$ eşitliği olduğundan kenar uzunlukları orantılıdır. O hâlde DEFT ~ NMRS'dir.

Etkinlik

Araç ve Gereç: kareli kâğıt, kalem, açıölçer, cetvel, makas



- Kareli kâğıda bir üçgen çiziniz. Çizdiğiniz üçgeni keserek ayırınız.
- Üçgenin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini ölçerek not ediniz.
- Üçgeni bir kenarından bu kenara paralel olacak şekilde katlayarak küçültünüz.
- Elde ettiğiniz üçgenin kenar uzunluklarını ve açı ölçülerini ölçerek not ediniz.
- İki üçgenin açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını karşılaştırınız.
- Bu işlemi birkaç kez tekrarlayarak yeni üçgenler elde ediniz. Bu üçgenlerin açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını karşılaştırınız.

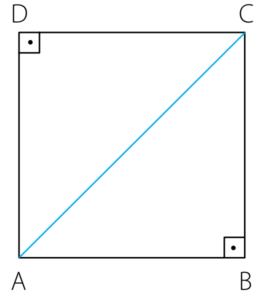
  ✓ Üçgenlerin açı ölçüleri değişti mi? Neden?

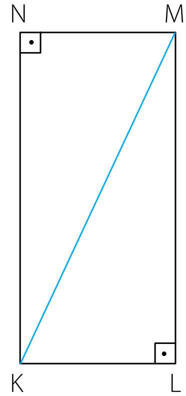
  ✓ Üçgenlerin kenar uzunlukları değişti mi? Neden?

  ✓ Elde ettiğiniz bütün üçgenler birbirine benzer midir? Arkadaşlarınızla tartışınız. Ulaştığınız sonuçları açıklayınız.

2. Örnek

Yandaki ABCD karesi ve KLMN dikdörtgeninin köşegenleri çizilmiştir. Oluşan üçgenlerin eşitliklerini gösterelim.





Çözüm

ABCD karesinin [AC] köşegeni, kareyi iki eş parçaya böler. Dolayısıyla DAC ve BCA üçgenleri eştir. Eşliği gösterelim.

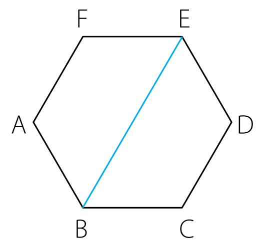
|DA| = |BC|, |AC| = |AC| ve |AB| = |DC|'dur. O hâlde $\overset{\frown}{DAC} \cong \overset{\frown}{BCA}$ olur.

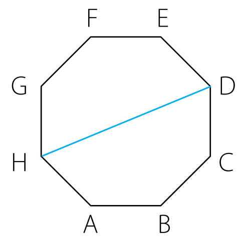
KLMN dikdörtgeninin [KM] köşegeni, dikdörtgeni iki eş parçaya böler. Eşliği gösterelim.

|KL| = |MN|, |KM| = |KM|, |NK| = |ML|'dur. O hâlde $\overset{\frown}{KLM} \cong \overset{\frown}{MNK}$ olur.

3. Örnek

Yanda verilen düzgün altıgen ve sekizgenin köşegenlerinin ayırdığı şekillerin eşlik ve benzerliklerini inceleyelim.





Çözüm

ABCDEF düzgün altıgeninin [BE] köşegeni, şekli iki eş parçaya bölmüştür. Şekil düzgün olduğundan;

|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA|'dur. ABEF ve DEBC dörtgenlerinin birbirine karşılık gelen kenar uzunlukları eşit olduğundan bu dörtgenler eştir.

ABEF $\cong$ DEBC olur.

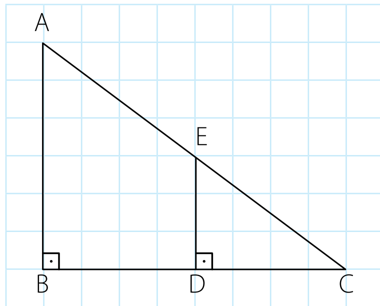
ABCDEFGH düzgün sekizgeninin [HD] köşegeni, şekli iki eş parçaya bölmüştür. Şekil düzgün olduğundan;

|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = |GH| = |HA|'dur.

HABCD $\cong$ HGFED olur.

4. Örnek

Yanda verilen üçgenlerin benzerliklerini gösterelim.



Çözüm

Kareli zeminde verilen şekilde [AB] // [DE]'dir. O hâlde $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{E})$'dır. Ayrıca

$2 \cdot |DC| = |BC|$

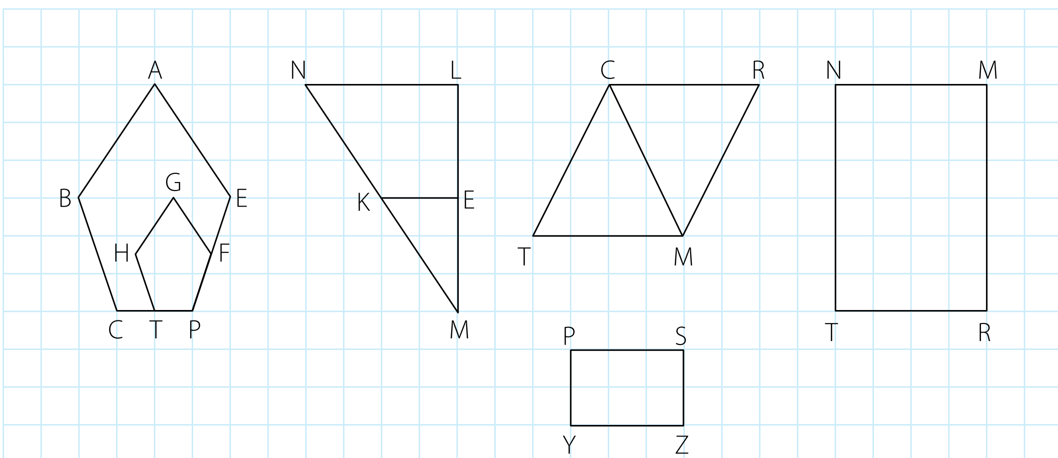
$2 \cdot |DE| = |AB|$

$2 \cdot |EC| = |AE|$

Birbirine karşılık gelen açı ölçüleri eşit ve üçgenlerin kenar uzunlukları orantılı olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$'dir.

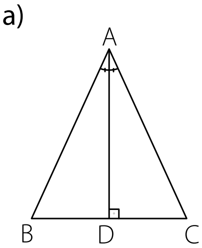
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki kareli bölgede verilen şekillerden eş ve benzer olanları belirleyiniz.

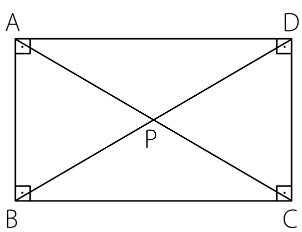


2. Aşağıdaki şekillerde eş olan üçgenleri belirleyiniz.

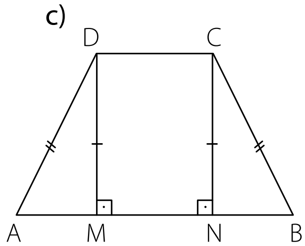
a)



b)

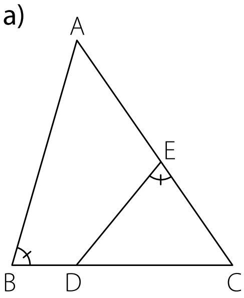


c)

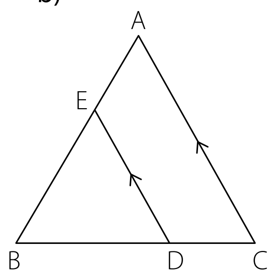


3. Aşağıdaki şekillerde benzer olan üçgenleri belirleyiniz.

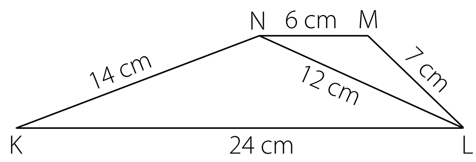
a)



b)

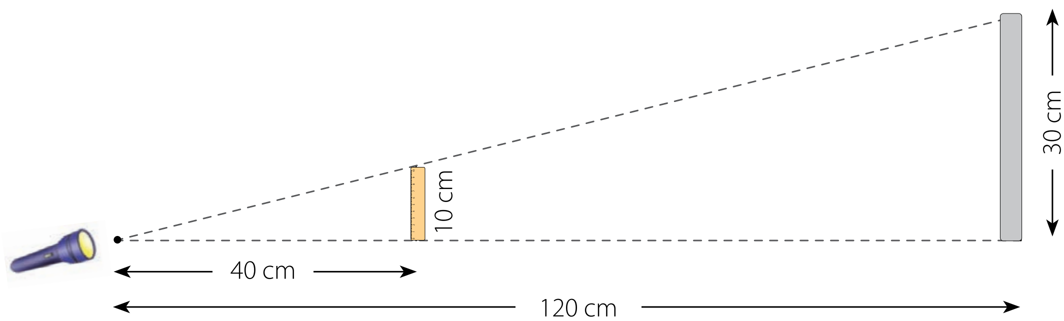


c)

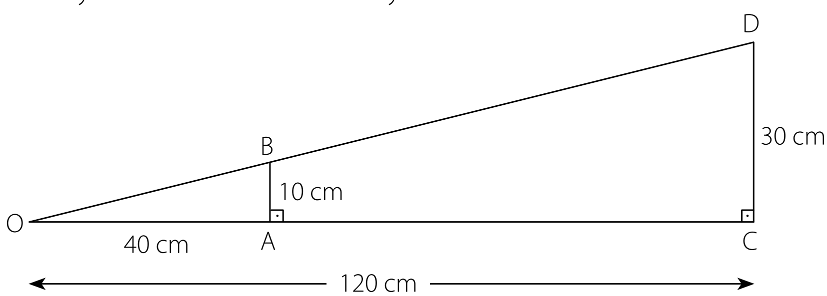


5.2.2. Benzerlik Oranı

Bir ışık kaynağından 40 cm uzaklıkta dik olarak tutulan 10 cm uzunluğundaki bir cetvelin bu ışık kaynağından 120 cm uzaklıktaki duvar üzerinde oluşan gölgesinin boyu 30 cm'dir. Bu durumu modelleyelim.



Cetvel ve gölgesinin uzunluğu ile ışık kaynağının cetvel ve duvara uzaklığı arasındaki ilişkiyi belirleyelim. Bu durumu modelleyelim.



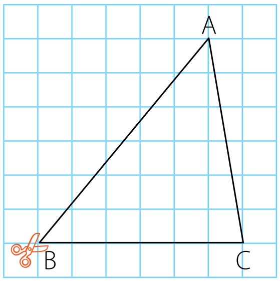
Modelde benzer üçgenler görülmektedir.

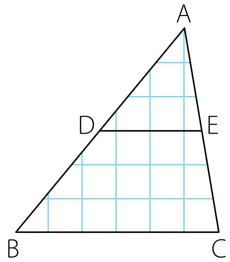
m($\widehat{OAB}$) = m($\widehat{OCD}$)'dir. O, ortak açıdır. Öyleyse $\widehat{BOA} \sim \widehat{DOC}$'dir.

$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \qquad \frac{|BA|}{|DC|} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Benzer üçgenlerin birbirine karşılık gelen kenar uzunlukları orantılıdır. Bu orantıdaki oran sabit bir sayıdır. Bu orana **benzerlik oranı** denir. Buradaki benzerlik oranı $\frac{1}{3}$'tür.

Kareli kâğıda bir üçgen çizip bu üçgeni keserek çıkaralım.





Bilgi Kutusu

Benzer iki şeklin karşılıklı kenar uzunlukları arasındaki orana ***benzerlik oranı*** *denir.*

Üçgeni BC kenarına paralel olacak şekilde katlayalım. Oluşan yeni üçgeni ADE üçgeni olarak adlandıralım.

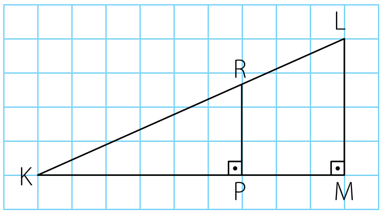
[BC] // [DE] olduğundan $\widehat{B}$ ve $\widehat{D}$, $\widehat{C}$ ve $\widehat{E}$ yöndeş açılardır. $m(\widehat{D}) = m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{E})$ olur. A açısı ortaktır. Bu durumda $\overset{\frown}{ADE} \sim \overset{\frown}{ABC}$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} k \cdot |AD| = |AB| \\ k \cdot |AE| = |AC| \\ k \cdot |DE| = |BC| \end{array}\right\} \quad \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{1}{k}$$

Benzerlik oranı $\frac{1}{k}$'dir.

1. Örnek

Yandaki kareli kâğıtta verilen KLM ve KPR üçgenlerinin benzerliklerini inceleyerek bu üçgenlerin benzerlik oranını bulalım.



Çözüm

Kareli bölgede görüldüğü gibi [LM] // [PR]'dır. Bu durumda;

$m(\widehat{P}) = m(\widehat{M})$, $m(\widehat{R}) = m(\widehat{L})$ olur. K açısı ortaktır.

O hâlde $\overset{\frown}{KPR} \sim \overset{\frown}{KML}$ olur. $\frac{|KP|}{|KM|} = \frac{|KR|}{|KL|} = \frac{|PR|}{|ML|}$'dur. $|KP| = 6$ br,

$|KM| = 9$ br olduğundan $\frac{|KP|}{|KM|} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ olur. Benzerlik oranı $\frac{2}{3}$'dir.

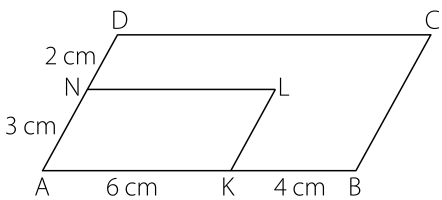
2. Örnek

Yandaki şekilde ABCD ve AKLN paralel kenardır.

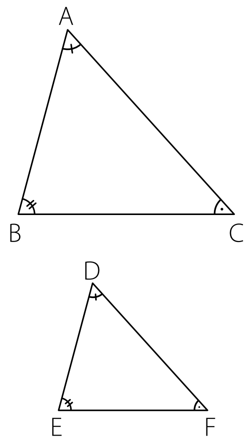
$|AK| = 6$ cm, $|KB| = 4$ cm,

$|AN| = 3$ cm, $|ND| = 2$ cm'dir.

Bu paralelkenarın benzerliklerini inceleyelim.



Bilgi Kutusu



$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ ise

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k$

olur.

"k" benzerlik oranıdır.

Çözüm

ABCD VE AKLN paralelkenar olduğundan [AK] // [DC] ve [AN] // [BC] olur.

Bu durumda $m(\widehat{K}) = m(\widehat{B})$, $m(\widehat{N}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{L}) = m(\widehat{C})$'dir.

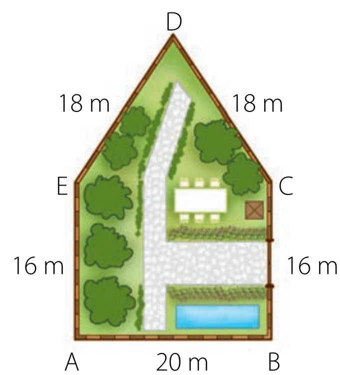
Paralel kenarların paralel olan kenar uzunluklarını oranlayalım.

$\dfrac{|AB|}{|AK|} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ olur.

$\dfrac{|AD|}{|AN|} = \dfrac{5}{3}$ bulunur. O hâlde ABCD ~ AKLN olur. Benzerlik oranı: $\dfrac{5}{3}$'tür.

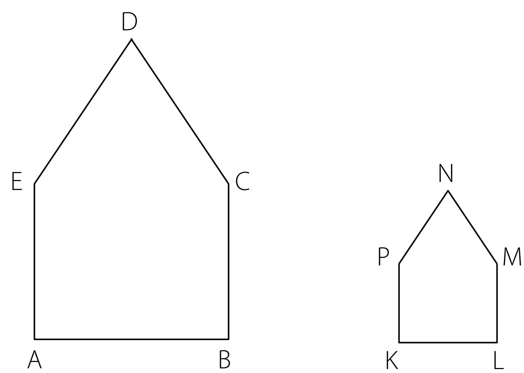
3. Örnek

Yandaki şekilde ölçüleri verilen bahçenin $\dfrac{1}{100}$ oranında küçültülerek krokisi çizilecektir. Bu krokiyi kenar uzunluklarını bularak çizelim.



Çözüm

Krokide ölçüler $\dfrac{1}{100}$ oranında küçültülecekse şekillerin açı ölçüleri eşit olur. Yeni beşgeni KLMNP biçiminde adlandıralım. Bu durumda bahçenin şekli ile krokisi benzer olur.



ABCDE ~ KLMNP'dir.

$$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{|BC|}{|LM|} = \frac{|CD|}{|MN|} = \frac{|DE|}{|NP|} = \frac{|EA|}{|PK|} = 100$$

Benzerlik oranı: 100

Ölçüleri cm cinsinden bulalım.

KLMNP beşgenini çizerken ABCDE beşgeninin açı ölçülerine dikkat edelim.

1 m = 100 cm ise 20 m = 2000 cm

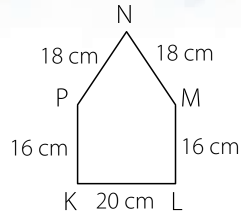
16 m = 1600 cm

18 m = 1800 cm

$$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{2000}{|KL|} = 100 \quad \text{ise} \quad |KL| = 20 \text{ cm}$$

$$\frac{|BC|}{|LM|} = \frac{1600}{|LM|} = 100 \quad \text{ise} \quad |LM| = 16 \text{ cm} \quad |LM| = |PK| = 16 \text{ cm}$$

$$\frac{|CD|}{|MN|} = \frac{1800}{|MN|} = 100 \quad \text{ise} \quad |MN| = 18 \text{ cm} \quad |MN| = |NP| = 18 \text{ cm olur.}$$



4. Örnek

Bir saat kulesinin yüksekliği 30 m, gölgesinin uzunluğu 6 m'dir. Günün aynı saatinde bir elektik direğinin gölgesinin uzunluğu 60 cm ise yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulalım.

Çözüm

Model çizelim.

Güneş ışını aynı açı ile geleceğinden $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ ve

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ olduğundan modeldeki üçgenler benzerdir.

$$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF} \text{ ise } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$$

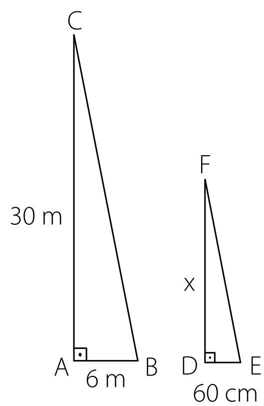
(6 m = 600 cm, 30 m = 3000 cm)

$$\frac{600}{60} = \frac{3000}{x} = 10 \text{ (benzerlik oranı)}$$

$x = 300$ cm

$= 3$ m

O hâlde elektrik direğinin yüksekliği 3 m'dir.

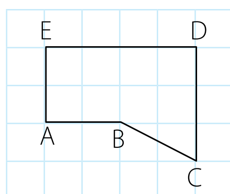


6 m = 600 cm

30 m = 3000 cm

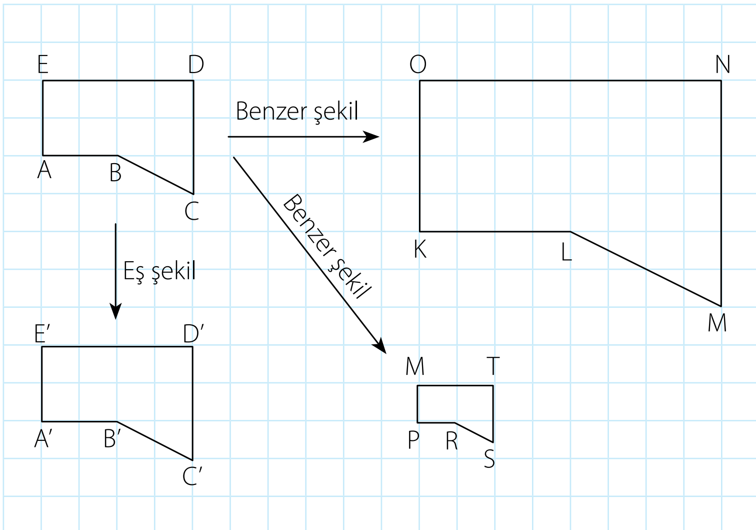
5. Örnek

Yandaki kareli bölgede verilen şekle eş ve bu şekille arasındaki benzerlik oranı 2 olan yeni iki şekil çizelim.



Çözüm

Eş şekli çizerken şeklin açı ölçülerini ve kenar uzunluklarını dikkate alarak aynı ölçülerde yeni bir şekil çizelim. Benzer şekil çizerken şeklin açı ölçülerini koruyalım ve kenar uzunluklarını yarısına düşürelim ya da iki katına çıkaralım.



ABCDE ≅ A′B′C′D′E′

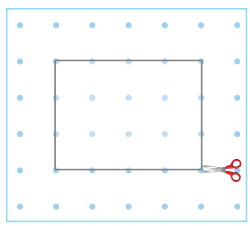
ABCDE ~ KLMNO

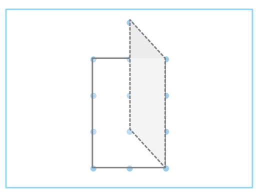
ABCDE ~ PRSTM

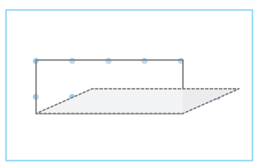
Etkinlik

Araç ve Gereç: 1cm'lik noktalı kâğıt, makas, kalem, cetvel

- Noktalı kâğıt üzerine ölçüleri 9 ve 12 cm olan bir dikdörtgen çiziniz.
- Çizdiğiniz dikdörtgeni keserek ayırınız.
- Dikdörtgeni iki kenarından da birer kez ikiye katlayınız.
- Elde ettiğiniz dikdörtgenin kenar uzunluklarını ölçünüz.
  - ✓ Başlangıçtaki dikdörtgen ile bu dikdörtgen birbirine benzer midir? Benzer ise benzerlik oranı kaçtır?
  - ✓ Benzerlik oranı 3 ve 4 olan yeni benzer dikdörtgenler nasıl elde edilebilir? Arkadaşlarınızla tartışınız. Ulaştığınız sonuçları açıklayınız.





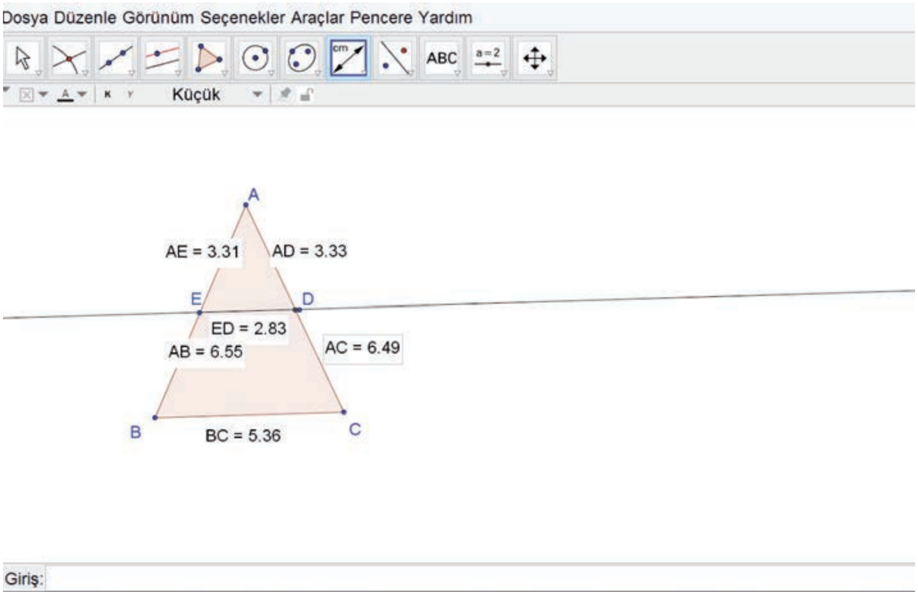


10. Örnek

Bir dinamik geometri yazılımından yararlanarak bir üçgen ve bu üçgenin tabanına paralel bir doğru çizelim.

Çözüm

ABC ve AED üçgenleri benzerdir. Her kenar uzunluğunu hesaplatalım ve kenar uzunluklarını birbirine oranlayalım.



$$AED \sim ABC \text{ ise } \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|ED|}{|BC|} \cong 0{,}51\text{'dir.}$$

O hâlde bir üçgenin tabanına paralel bir doğru çizdiğinizde oluşan üçgenler benzerdir.

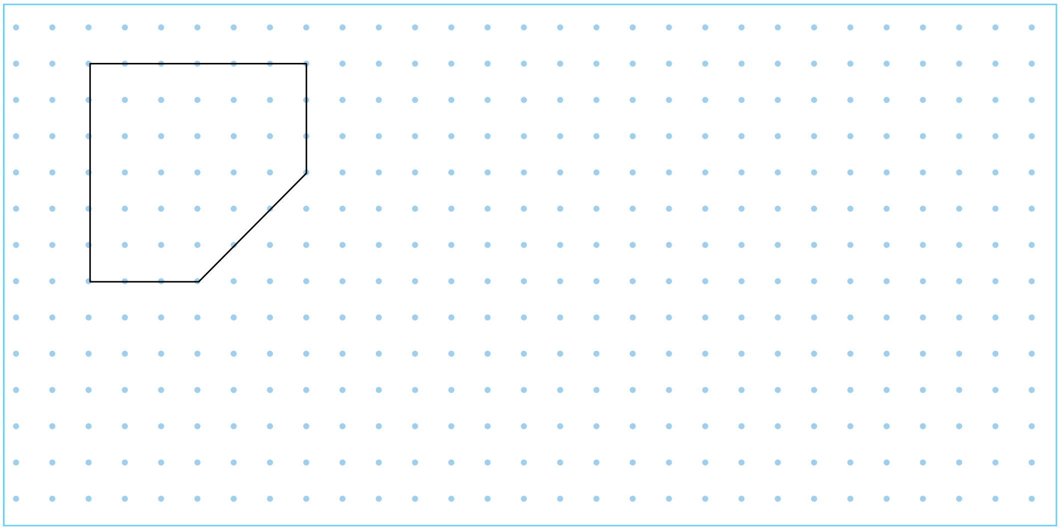
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Güneşli bir günde 10 m uzunluğundaki bayrak direğinin gölgesinin uzunluğu 18 m'dir. Aynı gün ve saatte, 135 cm uzunluğundaki bir kişinin gölgesinin uzunluğu kaç cm olur?

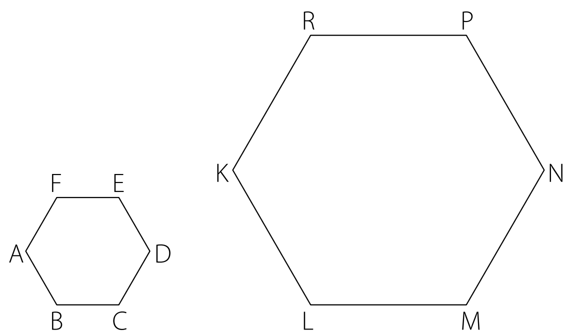
2. Bir ışık kaynağından 45 cm uzaklıkta bulunan bir kalemin uzunluğu 25 cm'dir. Kalemin ışık kaynağından 90 cm uzaklıkta bulunan ekran üzerindeki gölgesinin boyu kaç cm'dir?

A) 12,5 cm **B)** 50 cm **C)** 90 cm **D)** 100 cm

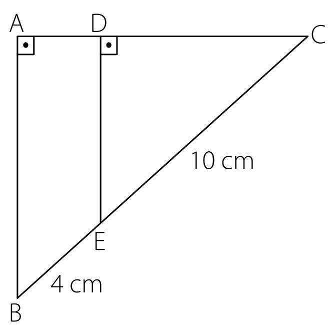
3. Aşağıdaki noktalı bölgede verilen şekle eş olan bir şekil çiziniz. Bu şekil ile benzerlik oranı 3 olan bir şekil daha çiziniz.



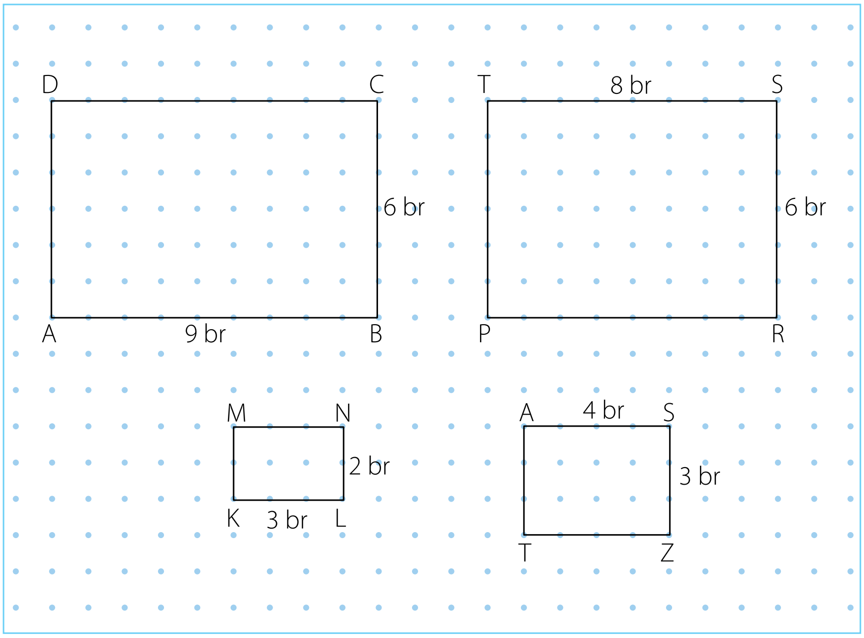
4. ABCDEF ve KLMNPR düzgün altıgendir. $|AB| = 8$ cm, $|MN| = 20$ cm olduğuna göre bu altıgenler arasındaki benzerlik oranı kaçtır?



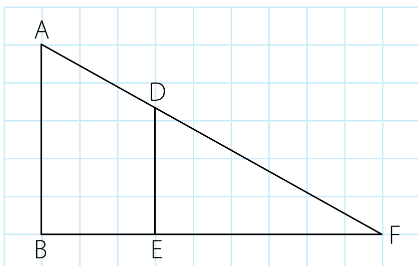
5. Yandaki şekilde $\widehat{CAB} \sim \widehat{CDE}$'dir. $|EC| = 10$ cm ve $|BE| = 4$ cm ise benzerlik oranı nedir?



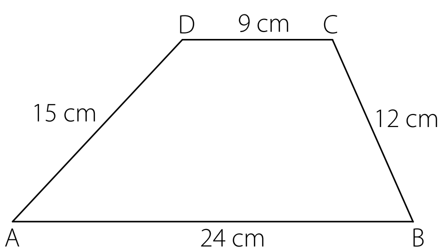
6. Aşağıdaki noktalı bölgede iki nokta arası 1 br'dir. Buna göre noktalı bölgede verilen dikdörtgenlerden benzer olanları belirleyip benzerlik oranlarını bulunuz.



7. Kareli kâğıtta verilen ABF ve DEF üçgenlerinin benzerliklerini inceleyerek bu üçgenlerin benzerlik oranını bulunuz.



8. Aşağıda verilen şekil $\frac{1}{3}$ oranında küçültülecektir. Küçük şeklin kenar uzunluklarını bulunuz.



5. Ünite Değerlendirme

1. **Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri tamamlayınız.**

   a) .... üçgende tabana ait kenarortay, açıortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır.

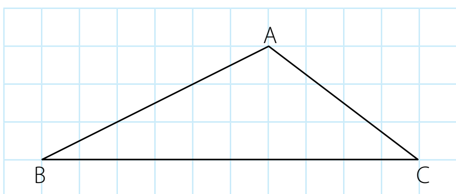
   b) Bir dik üçgende dik kenarlar aynı zamanda üçgenin .... dir.

   c) Üçgende bir kenar uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları farkının mutlak değerinden ...., diğer iki kenar uzunlukları toplamından .... tür.

   ç) Bir üçgende kısa kenar karşısında .... açı bulunur.

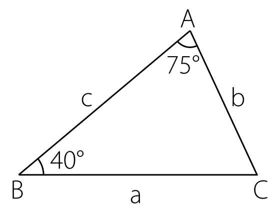
   d) Bir dik üçgende en uzun kenar .... tür.

2.



Yukarıda kareli kâğıt üzerinde verilen üçgenin [BC]'na ait açıortay, kenarortay ve yüksekliğini çiziniz.

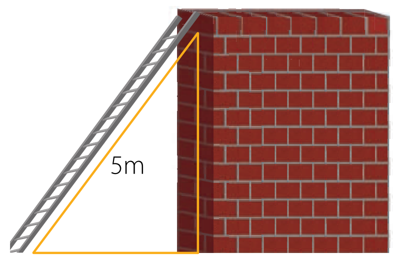
3. **Yandaki üçgenin kenar uzunluklarının büyükten küçüğe doğru sıralanışı hangi seçenekte doğru olarak verilmiştir?**



A) a > b >c   B) c > a > b

C) a > c > b   D) b > a > c

4.



Yukarıdaki merdivenin uzunluğu 5 m, yerdeki ucunun duvara uzaklığı ise 3 m'dir. Duvarın boyunun uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5   B) 4   C) 3   D) 2

5. **Koordinat sisteminde A(1, 3) ve B(–2, 5) noktaları arasındaki uzaklık aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{13}$ C) 2   D) 5

6. Aşağıda verilen uzunluklardan hangisi bir üçgene ait olabilir?

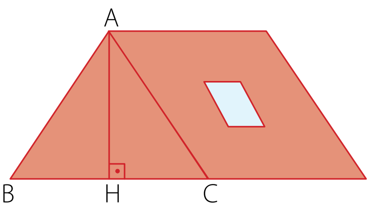
A) a = 5 cm b = 7 cm c = 2 cm

B) a = 9 cm b = 12 cm c = 8 cm

C) a = 1 cm b = 7 cm c = 9 cm

D) a = 1,3 km b = 3,8 km c = 1,7 km

7.



Yukarıdaki çadırda |AH| = 2m, |BH| = 1,5 m'dir. Buna göre |AB| kaçtır?

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 2,5

8. Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenlerden hangisi dik üçgendir?

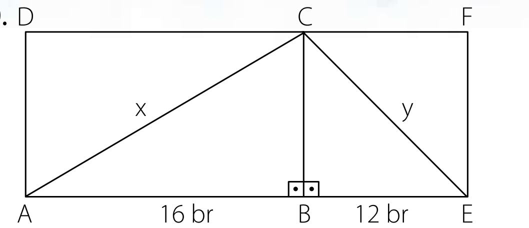
A) 16 br, 30 br, 34 br B) 5 br, 4 br, 7 br

C) 5 br, 20 br, 18 br D) 18 br, 20 br, 21 br

9. Yerden 8 m yükseklikteki bir pencereye ulaşmak için bir merdiven kullanılıyor. Merdivenin yerdeki ucu duvardan 4 m uzaklığa konuyor. Bu merdivenin uzunluğu ne kadardır?

A) $4\sqrt{5}$ m B) 5 m C) 5,5 m D) 6 m

10.



Yukarıdaki şekilde ABCD dikdörtgen, BEFC ise karedir.

|AB| = 16 br, |BE| = 12 br olduğuna göre x ve y değerleri aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru verilmiştir?

A) 20 ve $12\sqrt{2}$ B) 20 ve 12

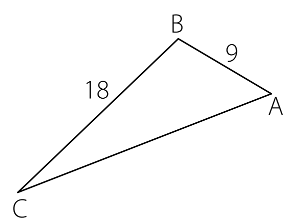
C) 12 ve 16 D) $20\sqrt{2}$ ve 12

11. Aşağıdaki seçeneklerin hangisinde, verilen kenar uzunluklarıyla bir üçgen çizilemez?

A) 9, 11, 17 B) 21, 12, 10

C) 9, 12, 15 D) 1, 4, 2

12. Yandaki üçgende verilmeyen kenar uzunluğu kaç farklı doğal sayı değeri alabilir?

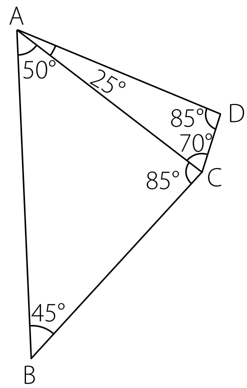


A) 12 B) 17 C) 20 D) 27

13. İki kenarının uzunluğu 11 ve 18 cm olan üçgenin çevre uzunluğu en az kaç cm olabilir?

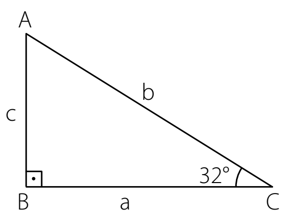
A) 27 B) 35 C) 37 D) 42

14. Yandaki şeklin en uzun kenarı hangisidir?



A) [BC] B) [AD] C) [AB] D) [AC]

15. Yandaki üçgenin kenar uzunluklarının doğru sıralanmış hâli seçeneklerin hangisinde doğru verilmiştir?



A) b > c > a B) b > a > c

C) a > b > c D) c > a > b

16. Aşağıdaki durumlardan hangisinde; cetvel, iletki ve pergel yardımıyla üçgen çizilemez?

A) Üç kenar uzunluğu verilen üçgen

B) Üç açısının ölçüsü verilen üçgen

C) İki kenar uzunluğu ile bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü verilen üçgen

D) Bir kenar uzunluğu ve bu kenarın iki ucundaki açılarının ölçüsü verilen üçgen

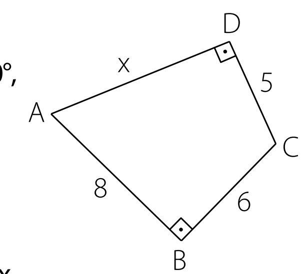
17. Aşağıda kenar uzunlukları veya hem kenar uzunlukları hem de açı ölçüleri verilen üçgenleri çiziniz.

a) Kenar uzunlukları 3, 4 ve 6 cm olan üçgen

b) İki kenar uzunluğu 4 ve 5 cm, bu kenarlar arasındaki açısının ölçüsü 45° olan üçgen

c) Bir kenarının uzunluğu 4 cm, bu kenarın iki ucundaki açılarının ölçüsü 50° ve 55° olan üçgen

18. Yandaki şekilde;
$m(\widehat{D}) = m(\widehat{B}) = 90°$,
$|AB| = 8$ br,
$|BC| = 6$ br,
$|DC| = 5$ br olduğuna göre $|AD| = x$ uzunluğu kaç birimdir?



A) 10 B) 15 C) $5\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$

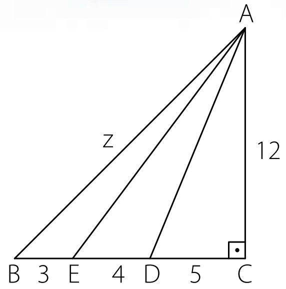
19. Yandaki şekilde;

$|AC| = 12$ br,

$|CD| = 5$ br,

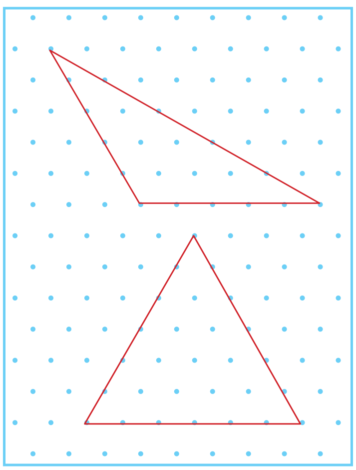
$|ED| = 4$ br,

$|BE| = 3$ br olduğuna göre z kaç birimdir?



A) 12 B) $12\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{3}$ D) $12\sqrt{5}$

20. Aşağıdaki izometrik kâğıtta verilen üçgenlerin kenarortaylarını çiziniz.



21. Aşağıdaki seçeneklerin hangisinde verilen ölçülerle tek çeşit üçgen çizilebilir?

A) $m(\widehat{A}) = 70°$, $a = 2$ cm, $b = 4$ cm

B) $m(\widehat{A}) = 36°$, $m(\widehat{B}) = 90°$, $m(\widehat{C}) = 54°$

C) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm

D) $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 40°$, $a = 6$ cm

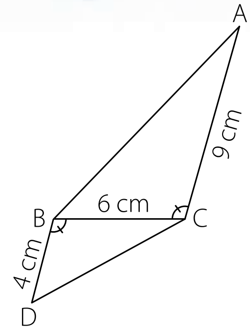
22. Yandaki şekilde;

$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{ACB})$

$|BC| = 6$ cm,

$|BD| = 4$ cm,

$|AC| = 9$ cm'dir.



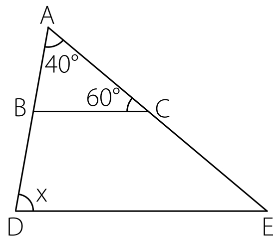
Buna göre benzerlik kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\widehat{CBA} \sim \widehat{BCD}$ B) $\widehat{ABC} \sim \widehat{CDB}$

C) $\widehat{ABC} \sim \widehat{BDC}$ D) $\widehat{BCA} \sim \widehat{CBD}$

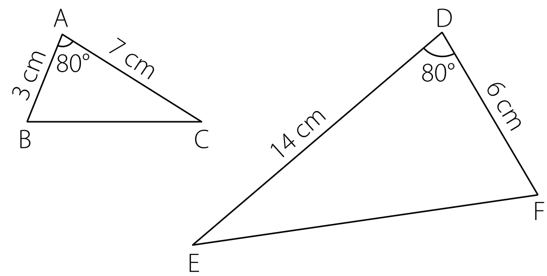
23. Yandaki şekilde;

$\widehat{ABC} \sim \widehat{ADE}$'dir. Şekilde verilenlere göre x kaç derecedir?



A) 40° B) 60° C) 80° D) 100°

24.



Yukarıda verilen benzer üçgenlerin benzerlik oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$

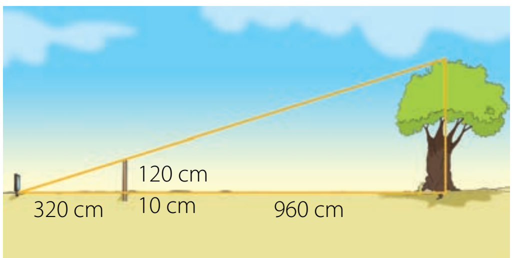
25. ABCDEF ve KLMNPR altıgendir ve ABCDEF ≅ KLMNPR'dir. Buna göre aşağıdaki eşitliklerden doğru olanların başındaki kutucuğa "D", yanlış olanların başındaki kutucuğa "Y" yazınız.

I. ☐ $|BC| = |PR|$ II. ☐ $m(\widehat{D}) = m(\widehat{N})$

III. ☐ $|CD| = |NM|$ IV. ☐ $m(\widehat{A}) = m(\widehat{K})$

V. ☐ $|DE| = |MP|$ VI. ☐ $m(\widehat{E}) = m(\widehat{R})$

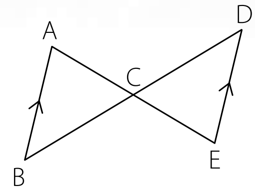
26.



Bir ağacın boyunu ölçmek için ayna ve 130 cm uzunluğundaki sopa kullanılmıştır. Sopa, ağaçtan 960 cm uzağa, 10 cm derine gömülmüştür. Ayna ise sopanın üst noktası ile ağacın üst noktasını aynı hizada görecek şekilde sopadan 320 cm uzağa yerleştirilmiştir. Buna göre ağacın boyu kaç m'dir?

A) 3,2 B) 4,8 C) 4,2 D) 4,5

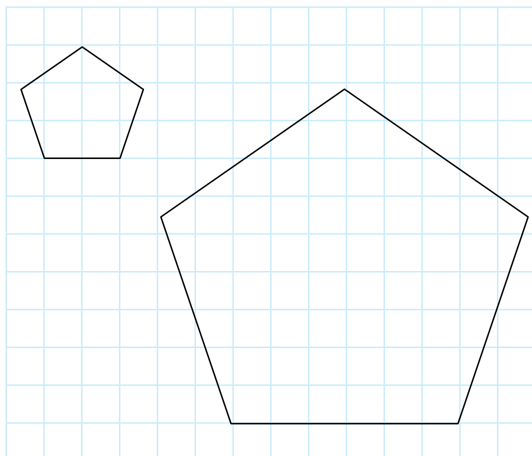
27. Yanda görülen şekildeki üçgenler eştir. [AB] // [DE] olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?



A) $|AB| = |DE|$ B) $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$

C) $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ D) $|AC| = |BC|$

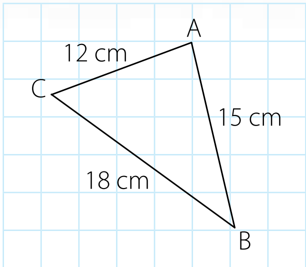
28.



Yukarıda verilen beşgenlerin benzerlik oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$

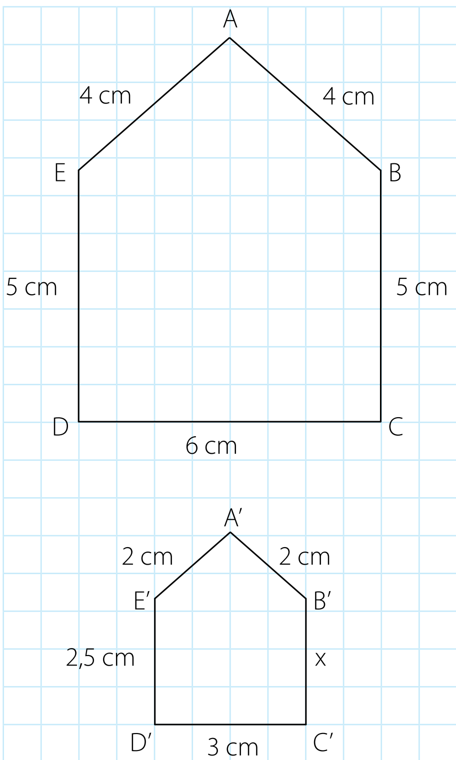
29.



Yukarıda verilen üçgenin $\frac{2}{3}$ katı büyüklüğünde çizilen üçgenin çevre uzunluğu kaç cm olur?

A) 75 cm
B) 60 cm
C) 30 cm
D) 25 cm

30.



Yukarıda verilenlere göre x kaçtır?

A) 2 cm
B) 2,5 cm
C) 3 cm
D) 3,5 cm

31. Aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

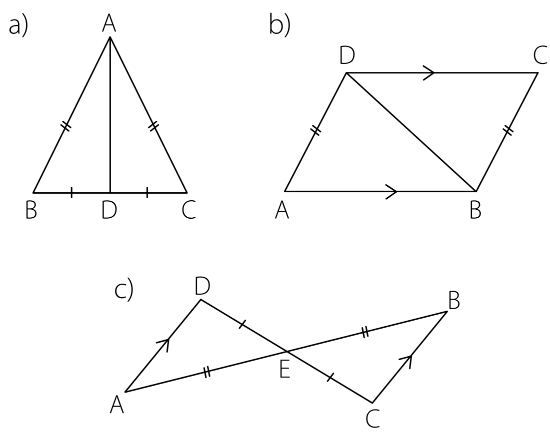
A) Eş şekiller, benzer değildir.

B) İki paralelkenar arasında bir eşleme verildiğinde, karşılıklı açı ölçüleri eşit ise bu iki paralelkenar eştir.

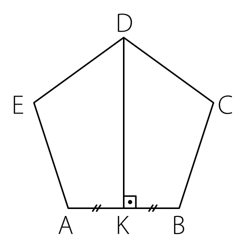
C) Tüm kareler benzerdir.

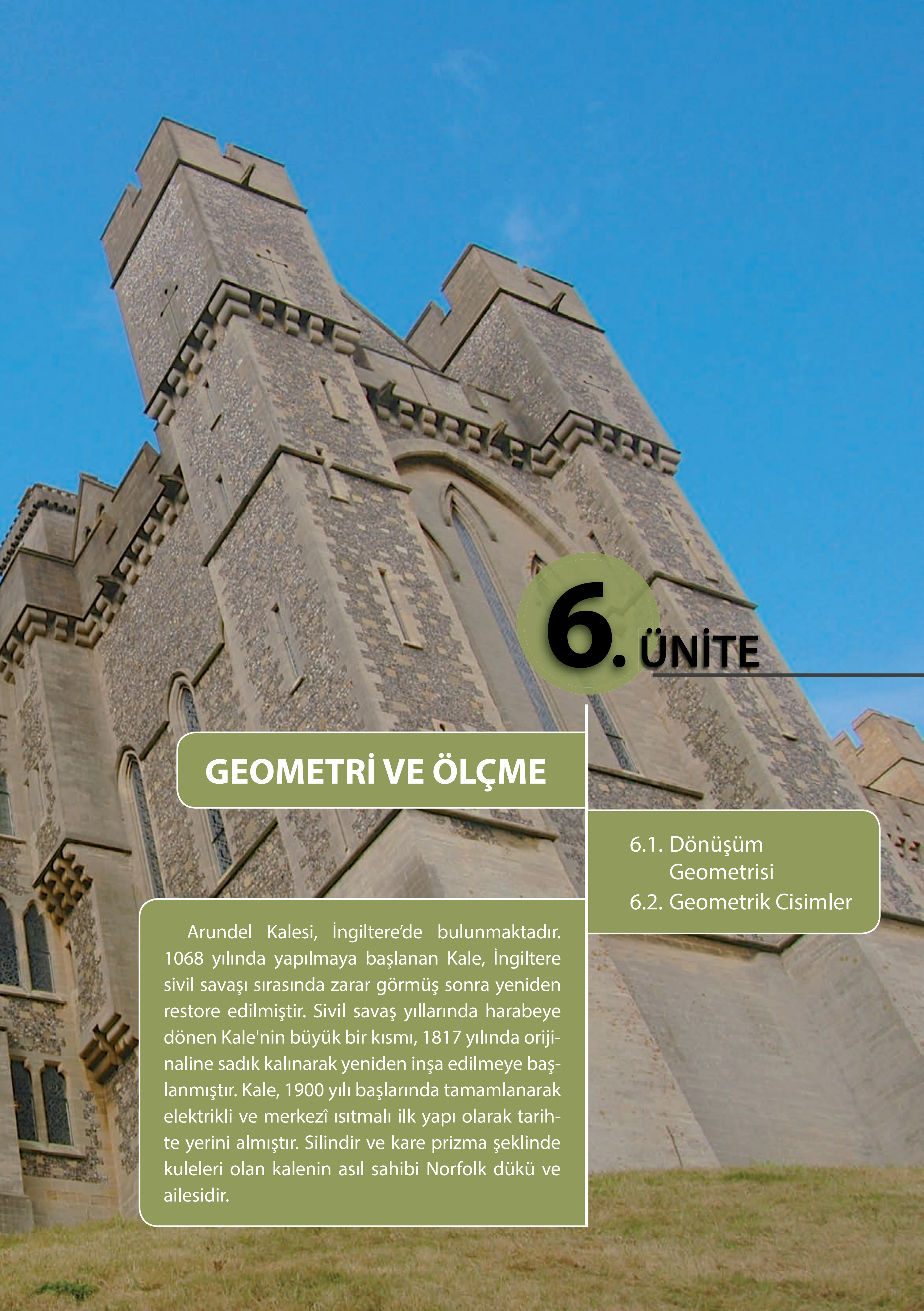
D) Benzer üçgenler eştir.

32. Aşağıda verilen şekillerde eş olan üçgenleri belirleyiniz.



33. Yandaki ABCDE düzgün beşgeninde gördüğünüz eşliği yazınız.





6. ÜNİTE

GEOMETRİ VE ÖLÇME

Arundel Kalesi, İngiltere'de bulunmaktadır. 1068 yılında yapılmaya başlanan Kale, İngiltere sivil savaşı sırasında zarar görmüş sonra yeniden restore edilmiştir. Sivil savaş yıllarında harabeye dönen Kale'nin büyük bir kısmı, 1817 yılında orijinaline sadık kalınarak yeniden inşa edilmeye başlanmıştır. Kale, 1900 yılı başlarında tamamlanarak elektrikli ve merkezî ısıtmalı ilk yapı olarak tarihte yerini almıştır. Silindir ve kare prizma şeklinde kuleleri olan kalenin asıl sahibi Norfolk dükü ve ailesidir.

6.1. Bölüm Dönüşüm Geometrisi

Yansımaları kullanmak fotoğraflarda tahmin edemeyeceğimiz güzellikte bir etkiye sahip olabilir.

Yansıma fotoğrafları çekebilmek için sadece ışığı yansıtma özelliğine sahip bir yüzeye -örneğin bir pencere camı, bir ayna ya da yerdeki bir su birikintisi- ihtiyaç var. Ayrıca çevremize biraz daha dikkatli bakmak ve ilk bakışta fark edilemeyen ayrıntıları görmeye çalışmak daha iyi yansıma fotoğrafları yakalamamıza yardımcı olabilir. Yansıma fotoğrafı çekerken dikkat etmeniz gereken en önemli şey rüzgârsız, durgun bir havada çekim yapmak olmalıdır. Havanın çok rüzgârlı olması durumunda doğal olarak sudaki yansıma bu hareketlilikten dolayı yansımayı dağıtacak ve görüntü net olmayacaktır.

http://www.bilimgenc.tubitak.gov.tr

Terimler veya Kavramlar

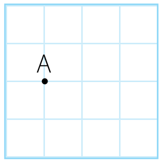
- *Yansıma*
- *Öteleme*
- *Görüntü*
- *Simetri doğrusu*

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

- *Nokta, doğru parçası ve diğer şekillerin öteleme sonucundaki görüntülerini çizme*
- *Nokta, doğru parçası ve diğer şekillerin yansıma sonucu oluşan görüntüsünü oluşturma*
- *Çokgenlerin öteleme ve yansımalar sonucunda ortaya çıkan görüntüsünü oluşturma*

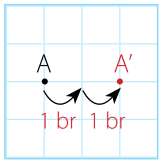
6.1.1. Öteleme Dönüşümü

Yandaki kareli düzlemde verilen A noktasını 2 birim sağa öteleyelim.



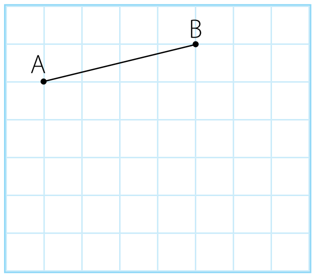
Bunun için A noktasını 2 kare sağa hareket ettirelim.

Elde ettiğiniz noktaya A´ diyelim. A´ noktası, A noktasının 2 birim ötelenmiş hâlidir.



1. Örnek

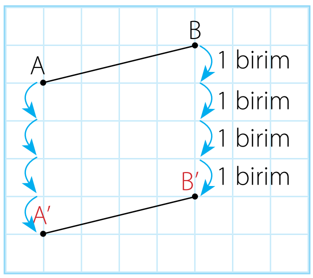
Yandaki kareli düzlemde verilen [AB]'nı 4 birim aşağıya öteleyelim.



Çözüm

[AB]'nı 4 birim aşağıya ötelemek için A ve B noktasının ayrı ayrı öteleyelim. Bu noktaları (A´ ve B´ noktalarını) birleştirip [A´B´] doğru parçası elde edelim.

[A´B´], [AB]'nın 4 birim aşağıya ötelenmiş hâlidir.

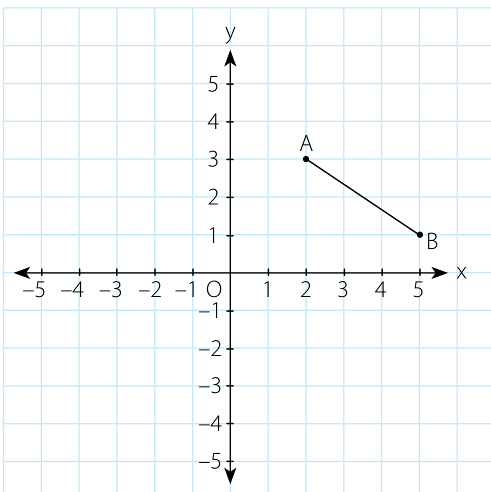


Bilgi Kutusu

*Bir noktanın, doğru parçasının veya şeklin belirli bir yön ve doğrultuda yer değiştirmesine **öteleme** denir.*

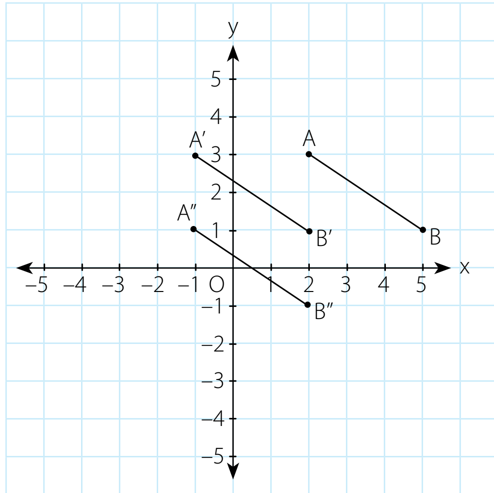
2. Örnek

Yandaki koordinat düzleminde verilen [AB]'nı 3 birim sola, 2 birim aşağıya öteleyelim.



Çözüm

A ve B noktalarını önce 3 birim sola öteleyerek A′ ve B′ noktalarını elde edelim. Sonra A′ ve B′ noktalarını 2 birim aşağıya öteleyerek A″ ve B″ noktalarını elde edelim. Noktaları birleştirerek ötelenmiş doğru parçasının görüntüsünü çizelim.



A(2, 3) → A′(–1, 3) → A″(–1, 1)

B(5, 1) → B′(2, 1) → B″(2, –1)

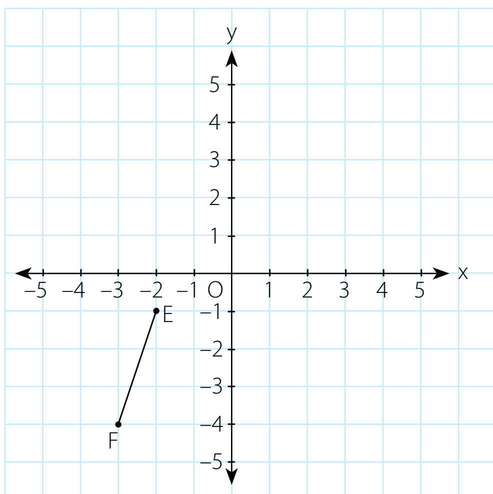
[A″B″], [AB]'nın 3 birim sola, 2 birim aşağıya ötelenmiş hâlidir. [A″B″] ile [AB]'nın uzunlukları eşittir.

Bilgi Kutusu

Şekil ile öteleme sonucu oluşan görüntüsü eştir. Öteleme sonucunda sadece şeklin yeri değişir.

3. Örnek

Aşağıdaki koordinat sisteminde verilen [EF]'nı 4 birim sağa, 5 birim yukarı öteleyelim.



Bilgi Kutusu

Doğruya göre öteleme yapılırken x ve y eksenleri boyunca, belirtilen yönde ve belirtilen birim kadar bütün noktalar paralel ötelenir.

x eksenine göre öteleme yapılırken bütün noktalar sağa ya da sola kayar. y eksenine göre öteleme yapılırken bütün noktalar aşağıya ya da yukarıya kayar.

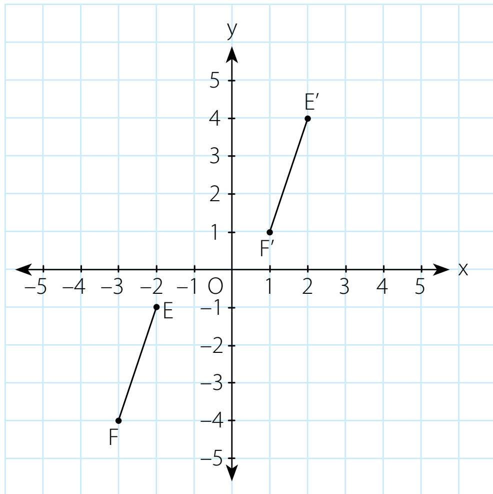
A(x, y) noktasının, x ekseninde a birim sağa ötelenmesi ile A′(x + a, y); a birim sola ötelenmesi ile A′(x – a, y) noktası elde edilir. A(x, y) noktasının, y ekseninde a birim yukarıya ötelenmesi ile A′(x, y + a); a birim aşağıya ötelenmesi ile A′(x, y – a) noktası elde edilir.

Çözüm

E ve F noktalarını istenen biçimde öteleyelim.

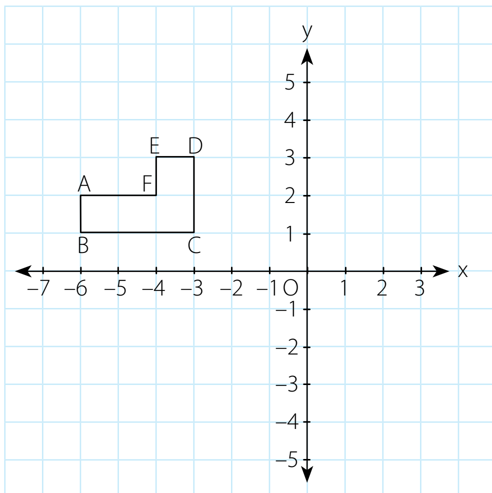
E(–2, –1) → E′(–2 + 4, –1 + 5) → E′(2, 4)

F(–3, –4) → F′(–3 + 4, –4 + 5) → F′(1, 1)



4. Örnek

Yandaki koordinat sisteminde verilen şeklin 2 birim sağa, 3 birim aşağı ötelenmesiyle elde edilen şeklin görüntüsünü çizelim.



Çözüm

A, B, C, D, E, F noktalarını istenen biçimde öteleyelim.

A(–6, 2) → E′(–6 + 2, 2 – 3) → A′(–4, –1)

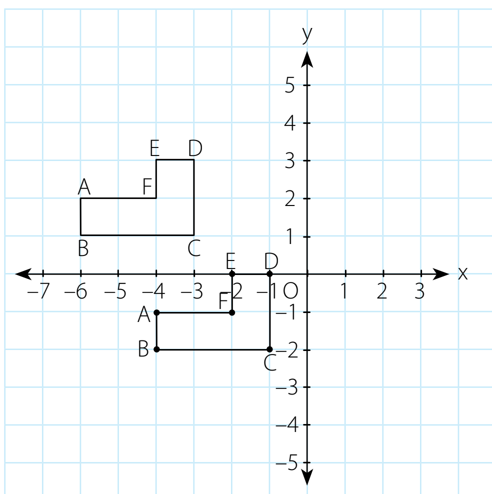
B(–6, 1) → B′(–6 + 2, 1 – 3) → B′(–4, –2)

C(–3, 1) → C′(–3 + 2, 1 – 3) → C′(–1, –2)

D(–3, 3) → D′(–3 + 2, 3 – 3) → D′(–1, 0)

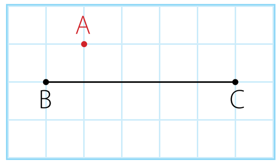
E(–4, 3) → E′(–4 + 2, 3 – 3) → E′(–2, 0)

F(–4, 2) → F′(–4 + 2, 2 – 3) → F′(–2, –1)

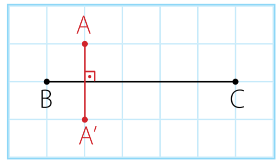


6.1.2. Yansıma Dönüşümü

A noktasının [BC]'na göre yansımasını bulalım.



Bunun için A noktasından [BC]'na dik doğru parçası çizelim. Doğru parçasını, doğru parçasının uzunluğu kadar [BC]'nın diğer tarafına uzatalım.

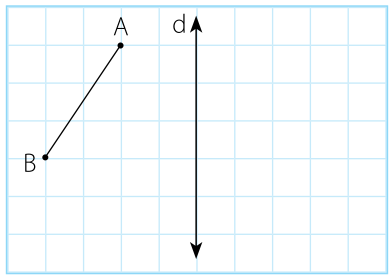


[BC], simetri doğrusudur.

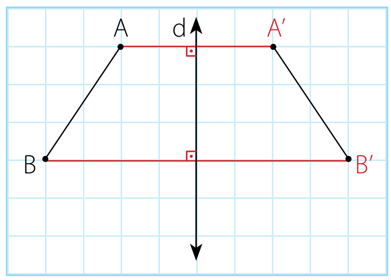
A′ noktası ile A noktasının [BC]'na uzaklıkları eşittir.

1. Örnek

Yanda kareli düzlemde verilen [AB]'nın d doğrusuna göre yansımasını alalım.



Çözüm



A ve B noktalarının d doğrusuna göre yansımasını alıp noktaları birleştirelim.

d doğrusu simetri doğrusudur. A ve A′ ile B ve B′ noktalarının simetri doğrusuna uzaklıkları eşittir ve diktir.

[A′B′] ile [AB] eştir.

Bilgi Kutusu

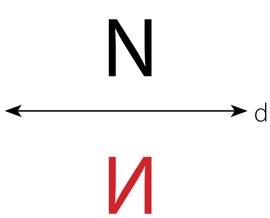
Yansımada şekil ve görüntüsü üzerinde birbirine karşılık gelen noktalar simetri doğrusuna diktir.

Yansımada şekil ile görüntüsü üzerinde birbirine karşılık gelen noktaların simetri doğrusuna dik ve aralarındaki uzaklıklar eşittir. Bu nedenle şekil ve görüntüsü eştir.

2. Örnek

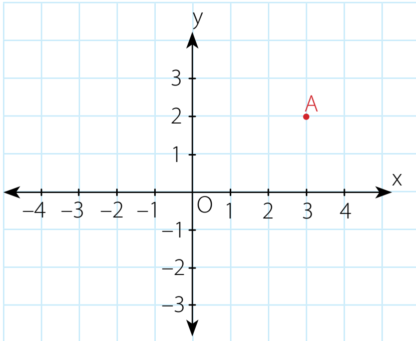
Yandaki şeklin d doğrusuna göre yansımasını bulalım.

Çözüm



3. Örnek

Yandaki koordinat sisteminde verilen A noktasının, x ve y eksenlerine göre yansıması altındaki görüntülerini belirleyelim.

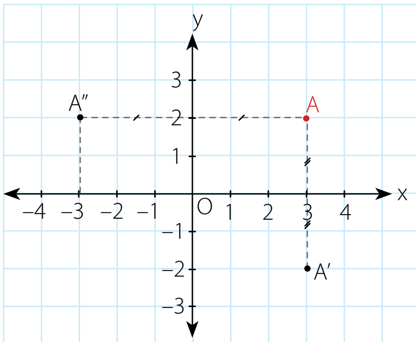


Çözüm

A noktasının koordinatları (3, 2)'dir. Bu koordinatların, x eksenine göre yansıma altındaki görüntüsü A′; y eksenine göre yansıma altındaki görüntüsü ise A″ noktasıdır.

A′(3, –2)

A″(–3, 2) olur.



Bilgi Kutusu

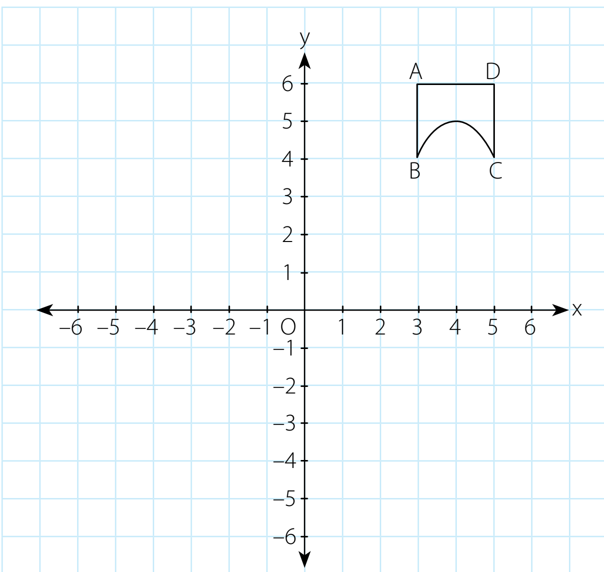
K(a, b) noktasının, x eksenine göre yansıması K′(a, –b) olur. x eksenine göre yansıma alınırken a'nın işareti değişmez, b'nin işareti değişir. K(a, b) noktasının, y eksenine göre yansıması K″(–a, b) olur. y eksenine göre yansıma alınırken b'nin işareti değişmez, a'nın işareti değişir.

$$K(a, b) \xrightarrow[\text{göre yansıma}]{\text{x eksenine}} K'(a, -b)$$

$$K(a, b) \xrightarrow[\text{göre yansıma}]{\text{y eksenine}} K''(-a, b)$$

4. Örnek

Aşağıda koordinat sisteminde verilen şeklin x ve y eksenine göre yansımasını çizelim.



Çözüm

A, B, C, D noktalarının x eksenine göre yansıma altındaki görüntüsü A′, B′, C′, D′; y eksenine göre yansıma altındaki görüntüsü A″, B″, C″, D″ olsun.

A(3, 6) → A′(3, –6)

B(3, 4) → B′(3, –4)

C(5, 4) → C′(5, –4)

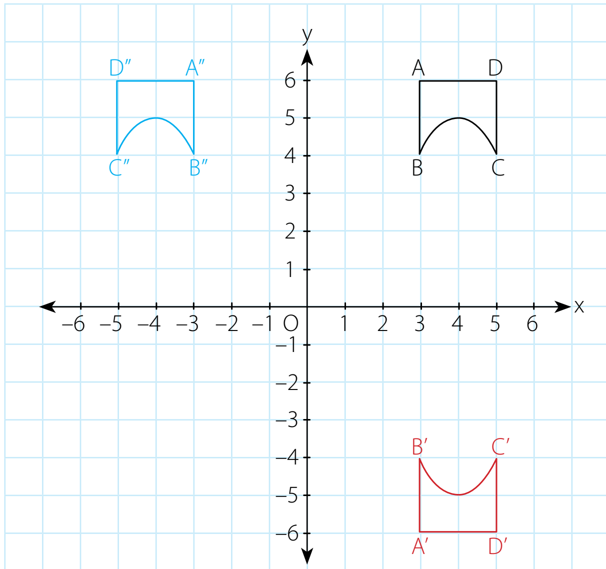
D(5, 6) → D′(5, –6)

A(3, 6) → A″(–3, 6)

B(3, 4) → B″(–3, 4)

C(5, 4) → C″(–5, 4)

D(5, 6) → D″(–5, 6)



5. Örnek

Koordinatları A(3, 4), B(1, 1), C(5, 2) olan bir üçgenin, x eksenine göre yansıma altındaki koordinatlarını bularak bu üçgeni çizelim.

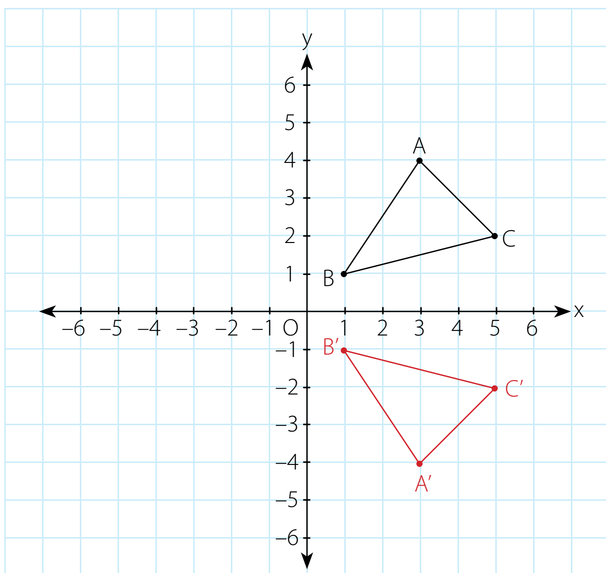
Çözüm

x eksenine göre yansımada birinci bileşenler sabit kalır, ikinci bileşenlerin işareti değişir.

A(3, 4) → A′(3, –4)

B(1, 1) → B′(1, –1)

C(5, 2) → C′(5, –2)

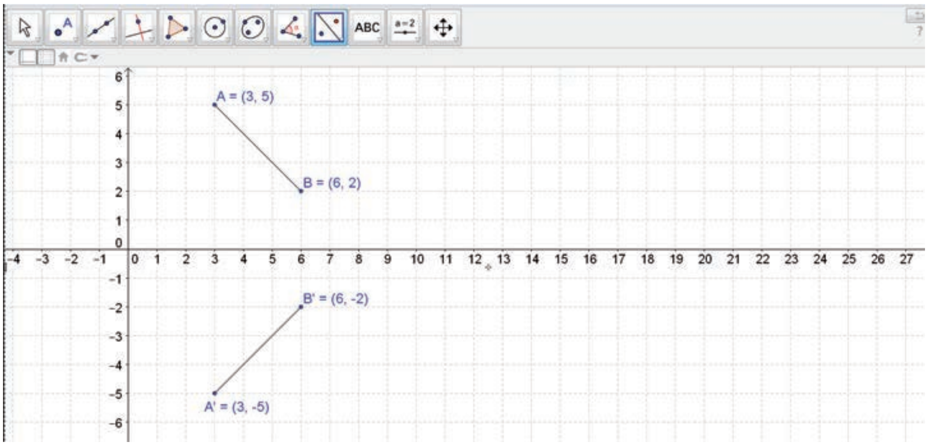


6. Örnek

Bir dinamik geometri yazılımından yararlanarak bir doğru parçasının x eksenine göre yansımasını çizelim.

Çözüm

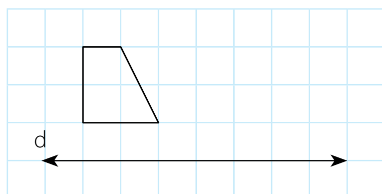
"Grafik" sekmesinden kareli görünümü seçelim. Bir [AB] çizelim. "Doğruda yansıt" sekmesini kullanarak önce [AB]'na, sonra x eksenine tıklayıp doğru parçasını yansıtalım:



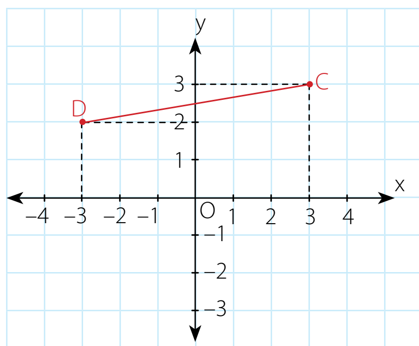
[AB]'nın x eksenindeki yansıması [A'B']'dır.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

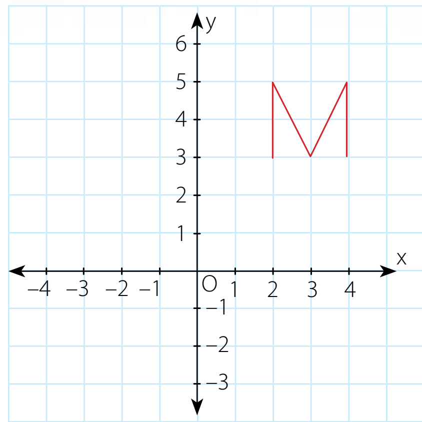
1. Yandaki kareli bölgede verilen şekli, d doğrusu boyunca 3 birim sağa öteleyiniz.



2. Yandaki koordinat sisteminde verilen [DC]'nın x eksenine göre yansımasında oluşan doğru parçasını çiziniz.



3. Yandaki koordinat sisteminde verilen şeklin, 2 br sola, 4 birim aşağı ötelenmesi sonucu oluşan şekli çiziniz.



6.1.3. Çokgenlerin Öteleme ve Yansıma Sonucundaki Görüntüleri

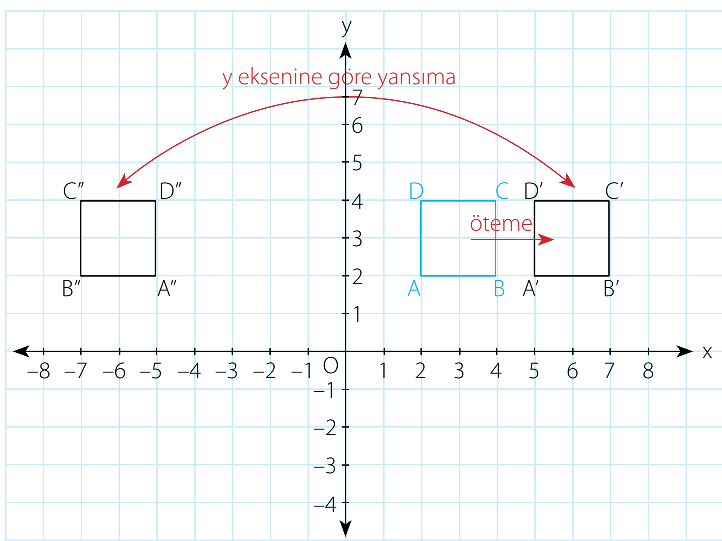
1. Örnek

Koordinatları A(2, 2), B(4, 2), C(4, 4), D(2, 4) olan kareyi 3 birim sağa öteleyerek y eksenine göre yansıtalım. Oluşan şeklin görüntüsünü çizelim.

Çözüm

İstenenleri adım adım yaparak oluşan karelerin köşelerinin koordinatlarını belirleyelim.

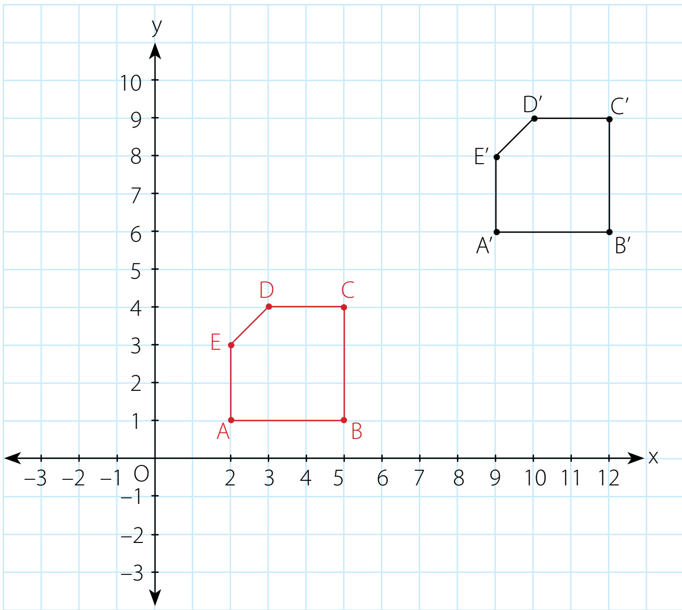
3 Birim Sağa Öteleme	y Eksenine Göre Yansıma
A(2, 2) → A′(2 + 3, 2) → A′(5, 2)	A′(5, 2) → A″(–5, 2)
B(4, 2) → B′(4 + 3, 2) → B′(7, 2)	B′(7, 2) → B″(–7, 2)
C(4, 4) → C′(4 + 3, 4) → C′(7, 4)	C′(7, 4) → C″(–7, 4)
D(2, 4) → D′(2 + 3, 4) → D′(5, 4)	D′(5, 4) → D″(–5, 4)



2. Örnek

Koordinatları A(2, 1), B(5, 1), C(5, 4), D(3, 4), E(2, 3) olan beşgen; 7 birim sağa, 5 birim yukarıya ötelendiğinde oluşan A′B′C′D′E′ beşgeninin koordinatlarını bularak görüntüsünü çizelim.

Çözüm



A(2, 1) $\rightarrow$ A′(2 + 7, 1 + 5) $\rightarrow$ A′(9, 6)

B(5, 1) $\rightarrow$ B′(5 + 7, 1 + 5) $\rightarrow$ B′(12, 6)

C(5, 4) $\rightarrow$ C′(5 + 7, 4 + 5) $\rightarrow$ C′(12, 9)

D(3, 4) $\rightarrow$ D′(3 + 7, 4 + 5) $\rightarrow$ D′(10, 9)

E(2, 3) $\rightarrow$ E′(2 + 7, 3 + 5) $\rightarrow$ E′(9, 8)

Etkinlik

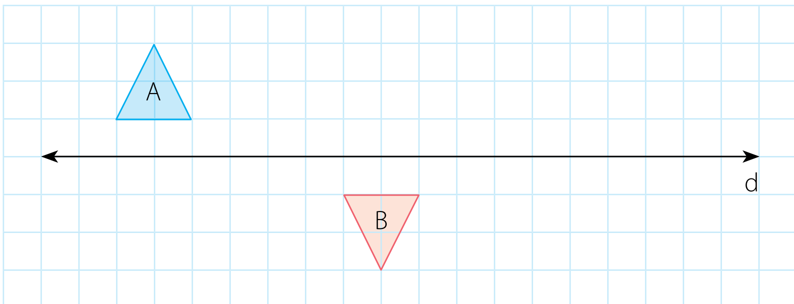
Araç ve Gereç: kareli kâğıt, cetvel

- Kareli kâğıt üzerine bir koordinat sistemi çiziniz.
- Koordinat sisteminde, koordinatları A(2, 3), B(4, 1), C(4, 2) olan üçgeni çiziniz.
- Bu üçgen için aşağıda istenenleri yaparak görüntülerini çiziniz. Bu işlemi yaparken üzerinde çalıştığınız kareli bölgeden yararlanınız.
  - Üçgeni 3 birim sola, 2 birim aşağıya öteleyiniz.
  - Elde ettiğiniz üçgenin x eksenine göre yansımasında oluşan görüntüsünü çiziniz.

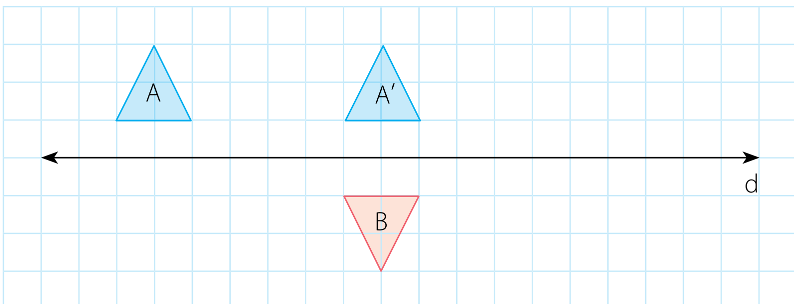
- Yaptığınız işlerden elde ettiğiniz görüntülerin köşe noktalarının koordinatlarını bulunuz.
  - ✓ A, B, C noktaları için istenenleri yapıp noktaları birleştirdiğimizde de aynı noktalar elde edilir mi? Neden?
  - ✓ Koordinat sisteminde verilen doğru parçaları ve düzlemsel şekiller nasıl ötelenir ve yansıtılır? Açıklayınız.
  - ✓ Elde ettiğiniz üçgen ile başlangıçtaki üçgen eş midir? Açıklayınız.

3. Örnek

Aşağıdaki düzlemsel bölgede verilen A şekli ile B şekli arasındaki ilişkiyi belirleyelim.



Çözüm



A şeklinin, sağa doğru 6 br öteleme ve d doğrusuna göre yansıması altındaki görüntüsü B şeklidir.

6. Örnek

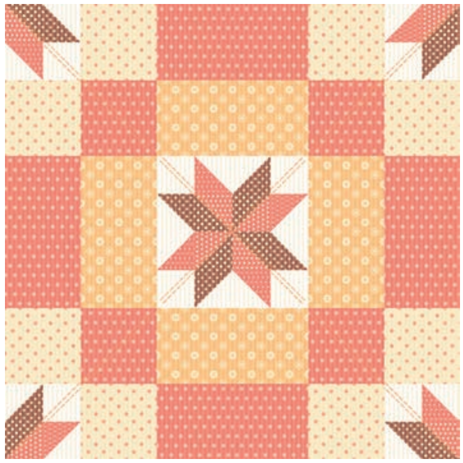
Yandaki çini desenli fayanslarda kullanılan dönüşümleri belirleyelim.

Çözüm

Fayanstaki üçgenler ve altıgen desenleri ötelenmiştir. Şekillerin ötelenme ve yansıma altındaki görüntüleri çizilerek çoğaltılmıştır.

4. Örnek

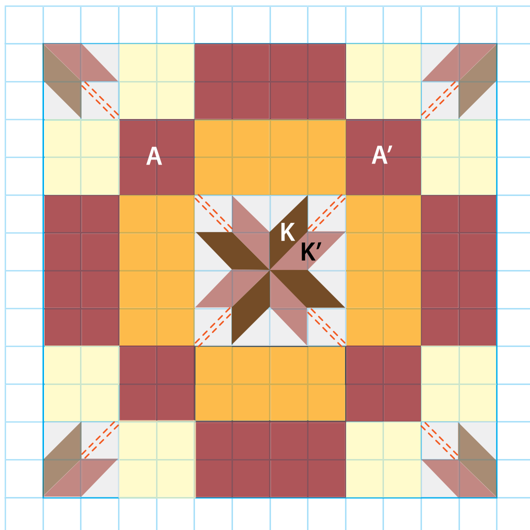
Aylin, bir çeyiz mağazasına her ay aksatmadan yanda örneği verilen desende örtü yaparak vermektedir. Yanda verilen desenin hangi dönüşümler kullanılarak oluşturulduğunu belirleyelim. Bu dönüşümler altındaki desenin modelini çizelim.



Çözüm

Kare, paralelkenar ve dikdörtgenlerin yansıma altındaki görüntüleri çizilerek desen oluşturulmuştur.

Örneğin, A karesi 6 birim sağa ötelenerek A′ karesi elde edilmiştir. Merkezdeki K paralelkenarının yansıması alınarak, K′ paralelkenarı elde edilmiştir.



5. Örnek

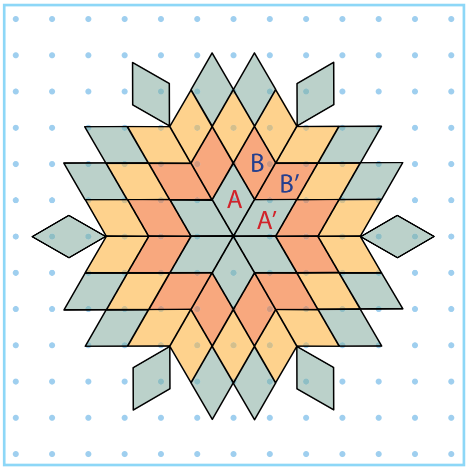
Sultanahmet Camisi'nde bulunan yandaki obje üzerindeki süslemelerin hangi dönüşümler kullanılarak yapıldığını belirleyelim.

Çözüm

Yeşil, kırmızı ve sarı renkteki eşkenar dörtgenlerin öteleme ve yansıma altındaki görüntüleri çizilerek süsleme yapılmıştır. Bu süslemenin modelini çizelim.

Örneğin, A şeklinin yansıması alınarak A′ elde edilmiştir.

A ve A′ şekilleri 1 birim ötelenerek B ve B′ şekilleri oluşmuştur. Bu şekilde, tüm motif elde edilmiştir.

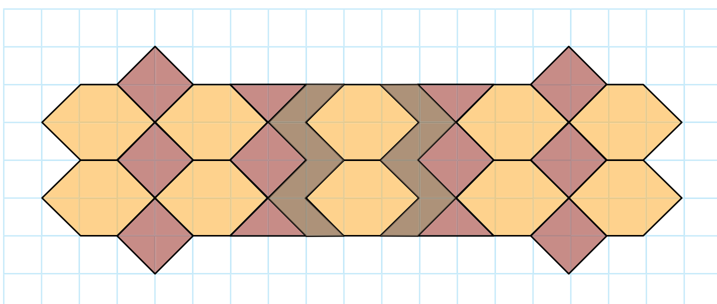


Sıra Sizde

Yanda, Topkapı Sarayında bulunan bir çini verilmiştir. Çinide kullanılan dönüşümleri belirleyiniz.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

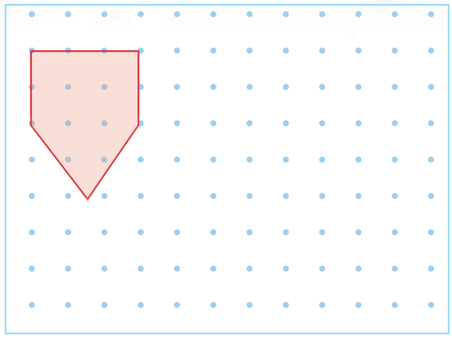
1. Yandaki süslemede kullanılan düzlemsel şekillerde hangi dönüşümlerin kullanıldığını bulunuz.



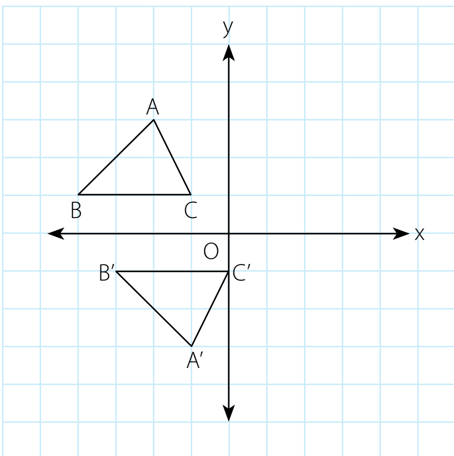
2. Yandaki noktalı bölgede verilen şeklin, aşağıda istenen dönüşümler sonucunda ortaya çıkan görüntülerini çiziniz.

a) 3 br sağa öteleme

b) 2 br aşağıya öteleme



3. Aşağıdaki koordinat sisteminde verilen ABC üçgenine hangi dönüşümler uygulanarak A′B′C′ üçgeni oluşturulmuştur?



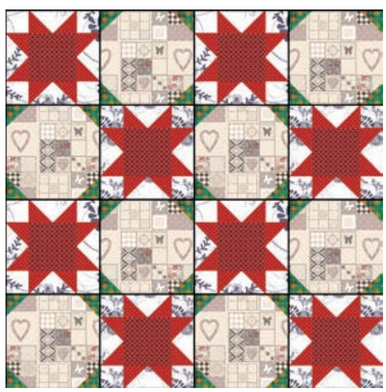
A) x eksenine göre yansıma

B) x eksenine göre yansıma ve 1 br sağa öteleme

C) 2 br sağa öteleme

D) y eksenine göre yansıma

4. Yanda verilen objenin süslemesinde hangi dönüşümler kullanılmıştır?



6.2. Bölüm
Geometrik Cisimler

Davul, Türklerin kullandığı en eski müzik aletlerinden biridir. Tahta veya madenî bir kasnağın iki yanına gerilmiş deriden oluşan davul, silindir biçimindedir. Deri kısımları davulun tabanlarıdır. Omza asılan kaytan, vurmak için kullanılan tokmak ve ince değnekten ibarettir. Davul, mehterde ve halk arasında tokmak ve değnekle çalınır. Bando ve boru-trampet takımlarında kullanılan davullar ise değneksiz, yalnız ön tarafına tokmakla vurularak çalınır. Davulun, müzik dışında çeşitli işlerde ve haberleşme aracı olarak kullanıldığı zamanlar da olmuştur.

Terimler veya Kavramlar

- *Taban*
- *Yükseklik*
- *Yüzey alanı*
- *Piramit*
- *Silindir*
- *Prizma*

Bu Bölümde Öğreneceklerimiz

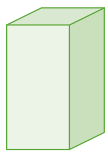
- *Dik prizmaları tanıma, bu prizmaların temel özelliklerini ve elemanlarını belirleme, dik prizmaları inşa etme ve bu prizmaların açınımını çizme*
- *Dik dairesel silindirin temel elemanlarını belirleme, dik dairesel silindiri inşa etme ve bu silindirin açınımını çizme*
- *Dik dairesel silindirin yüzey alanı bağıntısını oluşturma, dik dairesel silindir ile ilgili problemleri çözme*
- *Dik dairesel silindirin hacim bağıntısını oluşturma, dik dairesel silindir ile ilgili problemleri çözme*
- *Dik piramidi tanıma, dik piramidin temel elemanlarını belirleme, dik piramidi inşa etme ve bu piramidin açınımını çizme*
- *Dik koniyi tanıma, dik koninin temel elemanlarını belirleme, dik koniyi inşa etme ve bu koninin açınımını çizme*

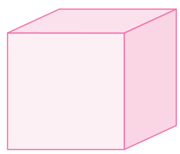
6.2.1. Dik Prizma

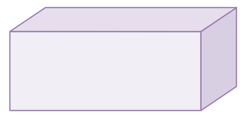
Hatırlayalım

1. Aşağıdaki kutular ile geometrik cisim modellerini eşleştiriniz.

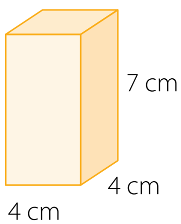



Kare prizma

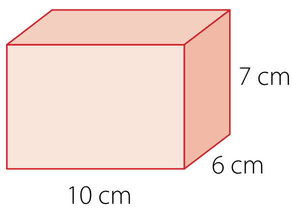

Küp


Dikdörtgenler prizma

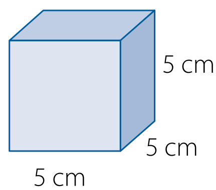
2. Aşağıdaki geometrik cisimlerin ayrıtlarını örnekteki gibi belirleyerek boş bırakılan yerlere yazınız.



Taban ayrıtları: 4 cm
Yükseklik: 7 cm

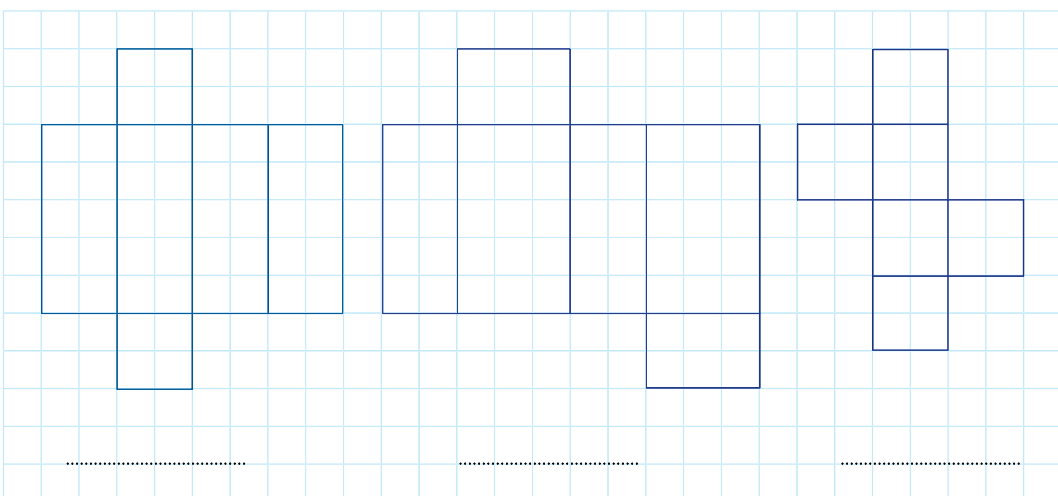


Taban ayrıtları: ....
Yükseklik: ....

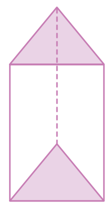


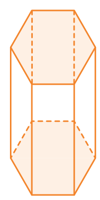
Taban ayrıtları: ....
Yükseklik: ....

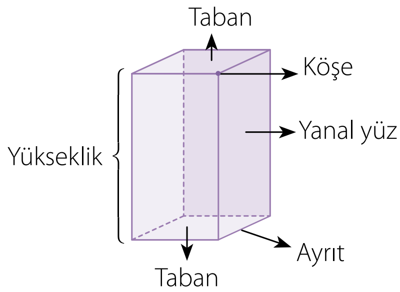
3. Aşağıdaki düzlemde açınımı çizilen geometrik cisimlerin isimlerini altlarına yazınız.



Tabanları birbirine paralel olan ve çokgensel bölgelerden oluşan geometrik cisimlere **prizma** denir. Prizmalar, tabanlarını oluşturan çokgensel bölgelere göre adlandırılır (Üçgen prizma, kare prizma, beşgen prizma, altıgen prizma gibi.). Yan yüzeyleri taban düzlemine dik olan prizmalara **dik prizma** denir. Prizmanın yüksekliği, tabanları arasındaki uzaklıktır. Prizmaların en, boy ve yükseklikleri vardır. Yan yüzleri ise dörtgensel bölgelerdir.


Üçgen prizma


Altıgen prizma



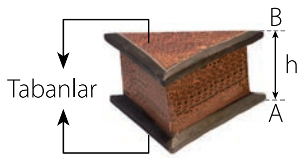
Prizmaların; taban, köşe, yanal yüz, ayrıt ve yüksekliği temel elemanlarıdır.

1. Örnek

Aşağıdaki kutuları inceleyerek yüksekliklerini ve benzedikleri prizmaların adlarını belirleyelim.



Çözüm

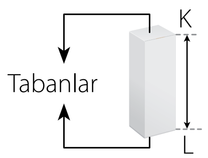


|AB| yüksekliktir.

Tabanları üçgen olduğundan üçgen dik prizmadır.

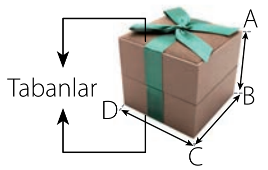
|MN| yüksekliktir.

Tabanları sekizgen olduğundan sekizgen dik prizmadır.



|KL| yüksekliktir.

Tabanları kare olduğundan kare dik prizmadır.



|AB| = |CB| = |DC|'dir. |AB| yüksekliktir.

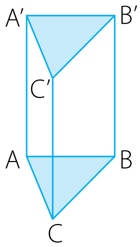
Tüm ayrıtlarının uzunluğu eşit olduğundan küptür.

|PR| yüksekliktir.

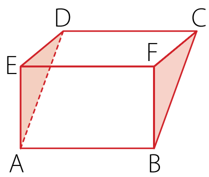
Tabanları altıgen olduğundan altıgen dik prizmadır.

2. Örnek

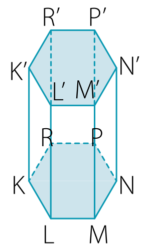
Aşağıdaki dik prizmaların temel elemanlarını belirleyelim.



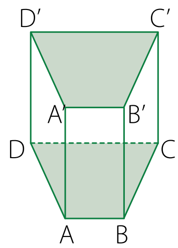
I. Şekil



II. Şekil



III. Şekil



IV. Şekil

Çözüm

I. Şekil: $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{A'B'C'}$ tabanlar,

A, B, C, A', B', C' köşeler,

ACC'A', CBB'C', ABB'A' yan yüzler,

[AB], [AC], [BC], [AA'], [BB'], [CC'], [A'B'], [A'C'], [B'C'] ayrıtlar,

|BB'| = |CC'| = |AA'| yüksekliktir.

Tabanları üçgen olduğundan üçgen dik prizmadır.

II. Şekil: $\widehat{EAD}$ ve $\widehat{FBC}$ tabanlar,

A, B, C, D, E, F köşeler,

EABF, EFCD, ABCD yan yüzler,

[EA], [AB], [BF], [FE], [ED], [DC], [CF], [BC], [DA] ayrıtlar,

|AB| = |EF| = |DC| yüksekliktir.

Tabanları üçgen olduğundan üçgen dik prizmadır.

III. Şekil: KLMNPR ve K'L'M'N'P'R' altıgenleri tabanlar,

K, L, M, N, P, R, K', L', M', N', P', R' köşeler,

KLL'K', LMM'L', MNN'M', NPP'N′ , RPP'R', RKK'R'yan yüzler,

[KL], [LM], [MN], [NP], [PR], [RK], [K'L'], [L'M'], [M'N'], [N'P'], [P'R'], [R'K'], [KK'], [LL'], [MM'], [NN'], [PP'], [RR'] ayrıtlar,

|KK′| = |LL'| = |MM'| = |NN'| = |PP'| = |RR'| yüksekliktir.

Tabanları altıgen olduğundan altıgen dik prizmadır.

IV. Şekil: ABCD, A'B'C'D' yamukları tabanlar,

A, B, C, D, A', B', C', D' köşeler,

ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D' yan yüzler,

[AB], [BC], [CD], [DA], [A'B'], [B'C'], [C'D'], [D'A'], [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] ayrıtlar,

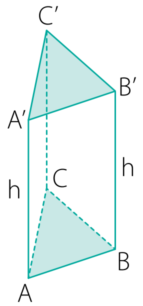
|AA'| = |BB'| = |CC'| = |DD'| yüksekliktir.

Tabanları yamuk olduğundan yamuk dik prizmadır.

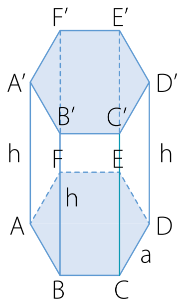
Sıra Sizde

Aşağıdaki dik prizmaların temel elemanlarını belirleyiniz.

a)



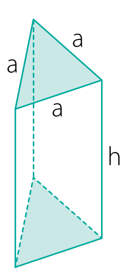
b)



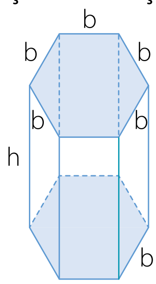
3. Örnek

Aşağıda verilen dik prizmaların açınımlarını çizelim.

a)



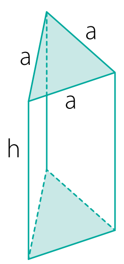
b)

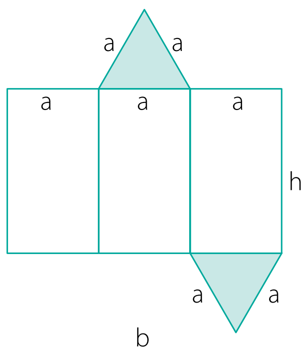


Çözüm

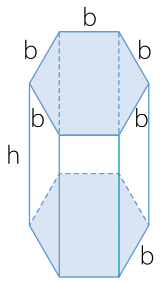
Prizmaların ayrıtlarını dikkate alarak açınımlarını çizelim.

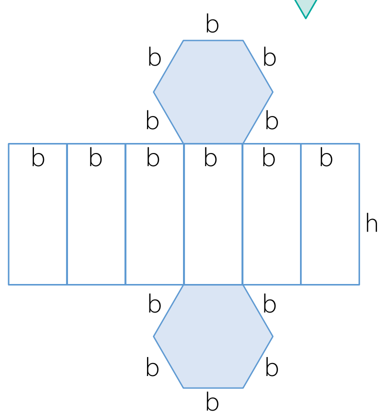
a)





b)

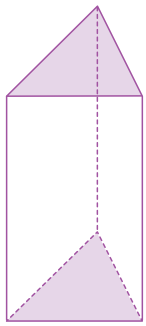




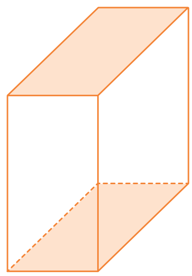
4. Örnek

Aşağıda verilen dik prizmaların açınımlarını kareli düzleme çizelim.

a)

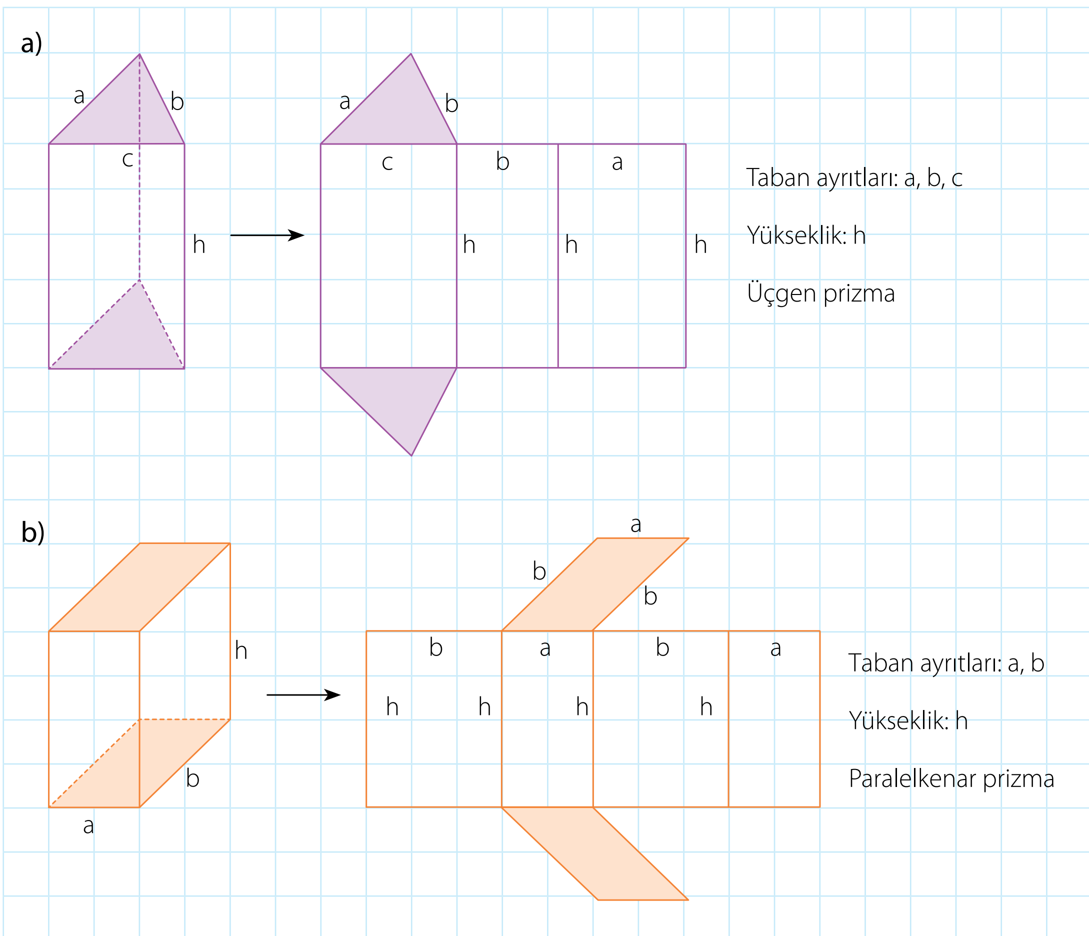


b)



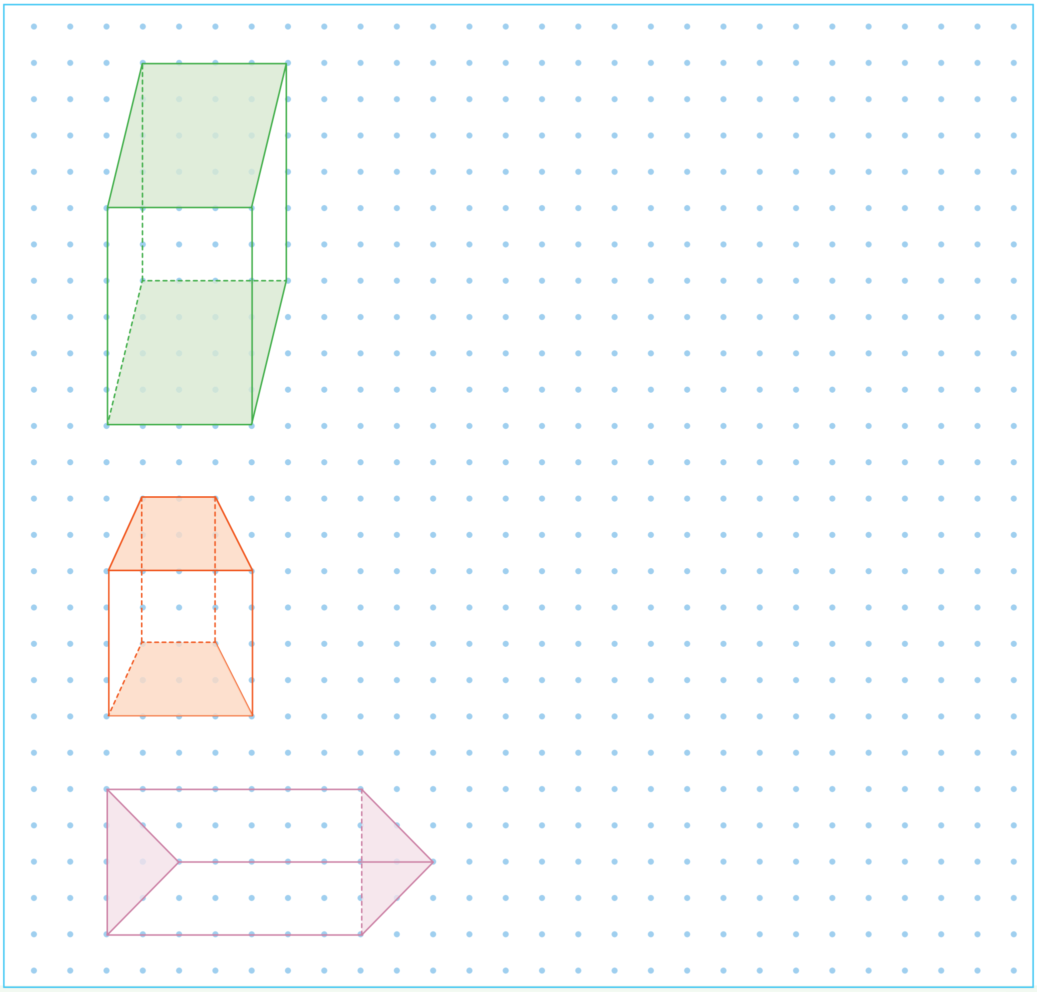
Çözüm

Prizmaların ayrıtlarını dikkate alarak açınımlarını çizelim.



Sıra Sizde

Aşağıdaki dik prizmaların açınımlarını noktalı düzleme çiziniz.

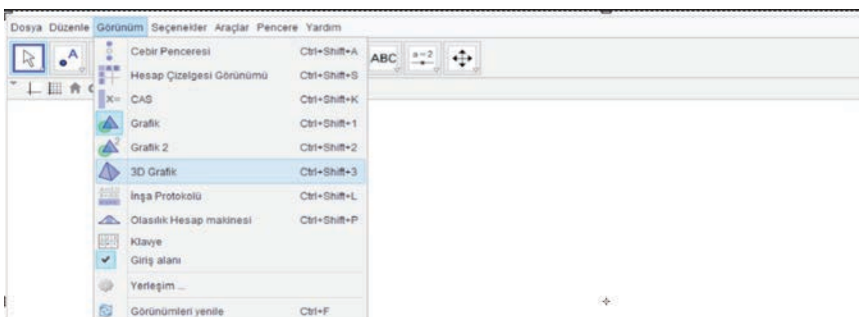


5. Örnek

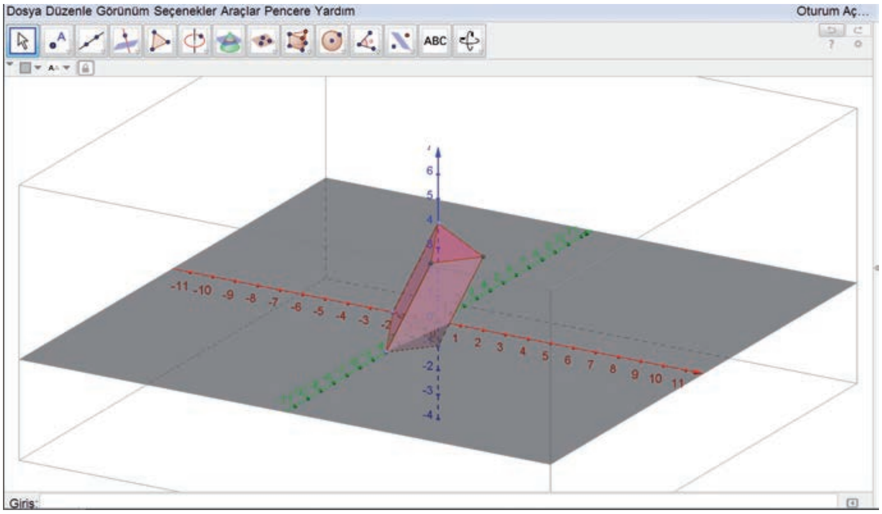
Bir dinamik geometri yazılımından yararlanarak üçgen prizma ve altıgen prizma çizelim.

Çözüm

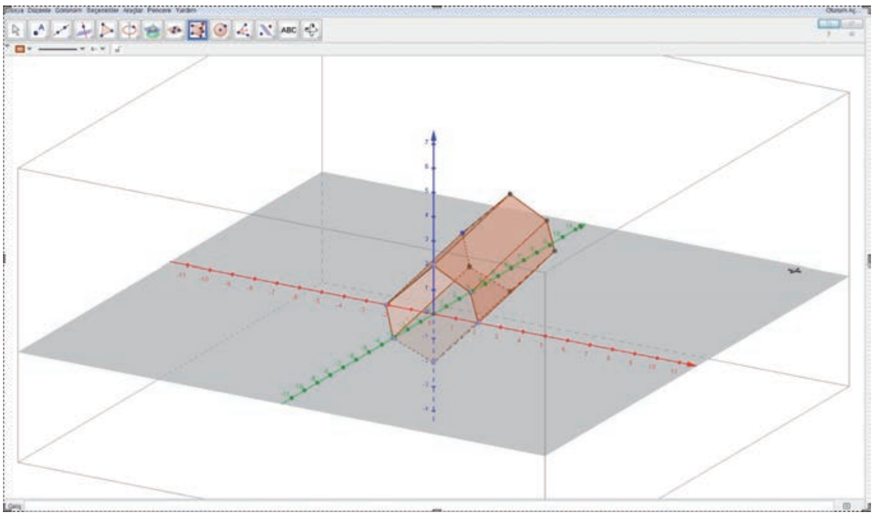
"3D Grafik" sekmesini seçelim.



"Prizma" sekmesinden üçgen bir taban için üç nokta seçerek üçgen prizma oluşturalım.

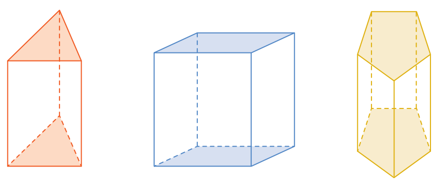


Taban için altı nokta seçerek altıgen prizma oluşturalım:

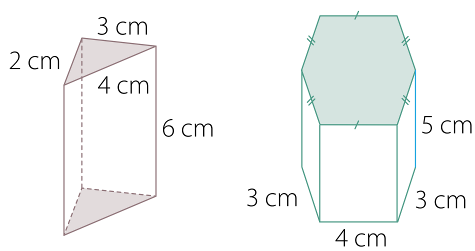


Öğrendiklerimizi Uygulayalım

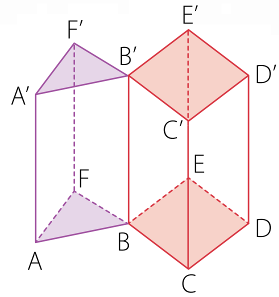
1. Yandaki prizmaların tabanlarını ve yüksekliğini belirleyerek prizmaların adlarını yazınız.



2. Yandaki prizmaların ayrıtlarını dikkate alarak açınımlarını çiziniz.



3. Yanda verilen yapıda kullanılan geometrik cisimleri ve temel elemanları belirleyiniz.



6.2.2. Dik Dairesel Silindir

Günlük yaşantımızda birçok eşya, silindir biçiminde tasarlanmıştır. Hatta bazı eşyaların adı söylendiğinde aklımıza hemen silindir biçimi gelir. Bunların arasında bardak, kavanoz, tuvalet kâğıdı rulosu, bobin vb. eşyalar vardır. Ayrıca bitkilerin gövdeleri de silindir biçimindedir.

İlk çağlarda atalarımız, doğada gördükleri bazı varlıklardan esinlenerek birçok eşyayı silindir biçiminde yapmışlardır.

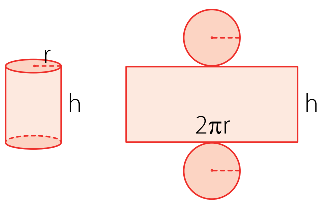
Sadece eşyalar değil binalar da silindir biçiminde tasarlanmıştır. Buna en güzel örnek İtalya'daki Pizza Kulesi'dir. Camilerimizin minareleri de yine silindir biçimindedir. Görüldüğü gibi silindir, hayatımızın her yerinde mevcuttur.

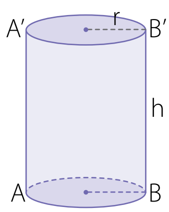


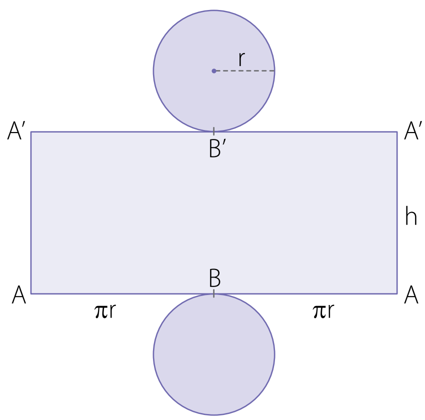

Birbirine paralel iki daire ve bunların arasında kalan dikdörtgensel bölgenin oluşturduğu cisim, dik dairesel silindirdir. Dairesel bölgeler, silindirin tabanları; silindirin üst tabanının bir noktasından alt tabanına indirilen dikme ise silindirin yüksekliğidir. Tabanları oluşturan dairesel bölgelerin yarıçapları, silindirin yarıçapıdır.

Bilgi Kutusu

Silindirin tabanını oluşturan dairenin çevre uzunluğu, yan yüzü olan dikdörtgensel bölgenin bir kenarının uzunluğudur.



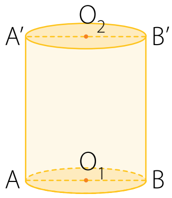




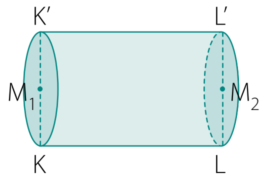
Dik dairesel silindirin temel elemanları; taban, yükseklik ve taban yarıçapıdır.

1. Örnek

Aşağıdaki dik dairesel silindirlerin temel elemanlarını belirleyelim.



I. Şekil



II. Şekil

Çözüm

I. Şekil: Tabanlar O_1 ve O_2 merkezli dairesel bölgelerdir.

$|AA'| = |BB'|$ yükseklik,

$|O_1A| = |O_1B| = |O_2A'| = |O_2B'|$ taban yarıçapıdır.

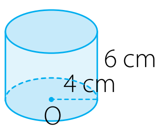
II. Şekil: Tabanlar M_1 ve M_2 merkezli dairesel bölgelerdir.

$|KL| = |K'L'|$ yükseklik,

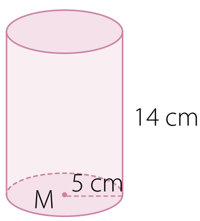
$|KM_1| = |M_1K'| = |LM_2| = |M_2L'|$ taban yarıçapıdır.

2. Örnek

Aşağıdaki dik dairesel silindirlerin açınımlarını çizelim. ($\pi = 3$ alalım.)



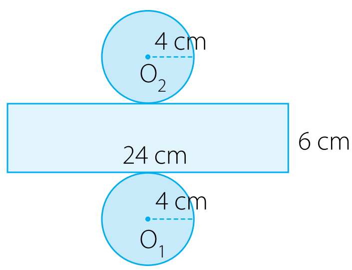
I. Şekil



II. Şekil

Çözüm

Ayrıtları verilen dik dairesel silindirlerin açınımlarını çizelim.



I. Şekil: Yarıçapı 4 cm, yüksekliği 6 cm'dir. Yan yüzü oluşturan dikdörtgenin kenar uzunluklarından biri 6 cm olduğuna göre diğer kenar uzunluğunu hesaplayalım.

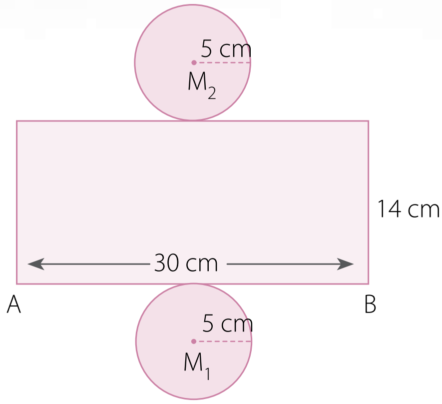
Dikdörtgenin bilinmeyen kenarının uzunluğu, tabandaki dairenin çevre uzunluğuna eşittir. Dairenin yarıçapı 4 cm olduğundan dikdörtgenin kenar uzunluğu: $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 4$ olur.

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ cm'dir.

II. Şekil: Yarıçapı 5 cm, yüksekliği 14 cm'dir. Yan yüzü oluşturan dikdörtgenin kısa kenar uzunluğu 14 cm ise uzun kenar uzunluğu;

$2 \cdot \pi \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

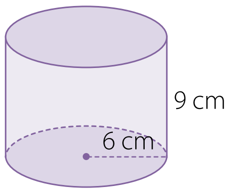
$= 30$ cm olur.



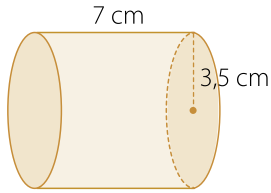
Sıra Sizde

Aşağıda ayrıtları verilen dik dairesel silindirlerin ölçülerine göre açınımlarını çiziniz. ($\pi = 3$ alınız.)

a)

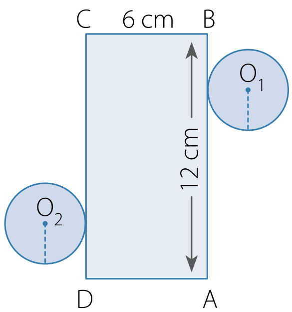


b)

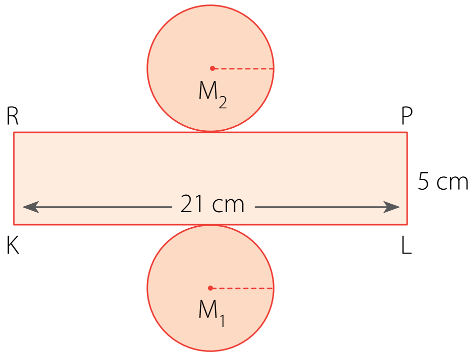


3. Örnek

Aşağıda açınımları verilen dik dairesel silindirleri inşa edelim. ($\pi = 3$ alalım.)



I. Şekil



II. Şekil

Çözüm

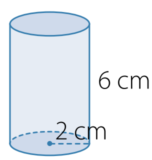
Dik dairesel silindirlerin yükseklikleri bellidir. Yarıçaplarını bulup ayrıtlarına dikkat ederek silindirleri inşa edelim.

I. Şekil: $|CB| = 6$ cm olduğundan yükseklik 6 cm'dir.

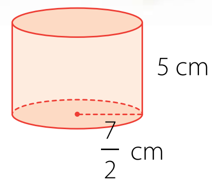
$|AB| = 12$ cm'dir. O hâlde dik dairesel silindirin yarıçapını bulalım.

$12 = 2 \cdot \pi \cdot r$

$12 = 2 \cdot 3 \cdot r$ ise $r = 2$ cm olur.



II. Şekil: |PL| = 5 cm olduğundan yükseklik 5 cm olur. |KL| = 21 cm'dir. O hâlde dik dairesel silindirin yarıçapını bulalım.

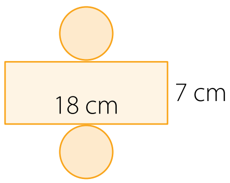


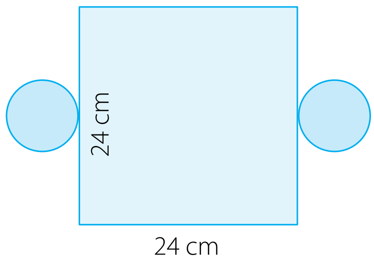
$21 \text{ cm} = 2 \cdot \pi \cdot r$

$21 = 2 \cdot 3 \cdot r$ ise $r = \frac{7}{2}$ cm olur.

Sıra Sizde

Aşağıda açınımları verilen dik dairesel silindirleri inşa ediniz. ($\pi = 3$ alınız.)

a) 

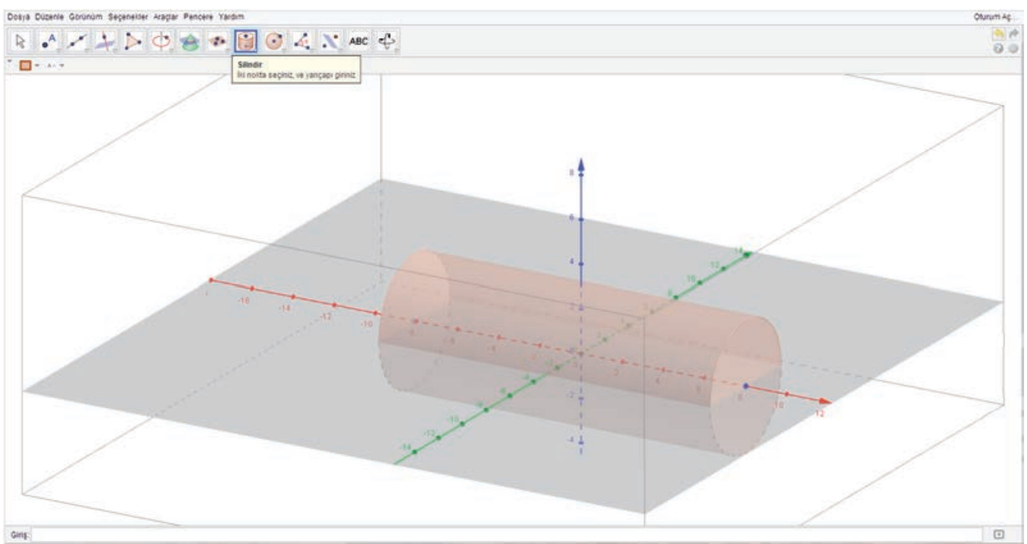
b) 

4. Örnek

Bir dinamik geometri yazılımından yararlanarak dik dairesel silindir çizelim.

Çözüm

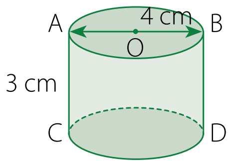
Bir dinamik geometri yazılımında "3D Grafik" sekmesini seçelim. Silindire tıklayalım. İki nokta işaretleyelim ve yarıçapı 3 olarak yazalım.



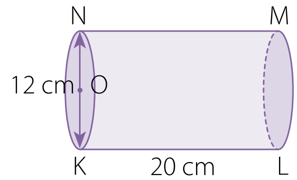
Siz de farklı noktalar seçerek ve farklı yarıçap uzunlukları belirleyerek dik dairesel silindirler çiziniz.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki dik dairesel silindirlerin tabanlarını gösteriniz. Bu dik dairesel silindirlerin, yarıçap uzunluğunu ve yüksekliğini boş bırakılan yerlere yazınız.

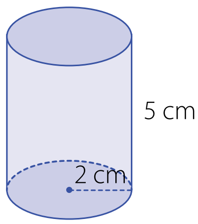


Yarıçap: ....
Yükseklik: ....



Yarıçap: ....
Yükseklik: ....

2. Aşağıda ayrıtları verilen dik dairesel silindirin açınımını, ölçülere dikkat ederek çiziniz. ($\pi = 3$ alınız.)

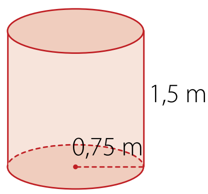


3. Yarıçapı 5 cm, yüksekliği 12 cm olan dik dairesel silindirin açınımını çiziniz.

6.2.3. Dik Dairesel Silindirin Yüzey Alanı

1. Problem

Aşağıda verilen dik dairesel silindir biçimindeki varillerin 5 tanesinin dış yüzü boyanacaktır. Boyanacak alan ne kadardır? ($\pi = 3$ alalım.)



Çözüm

1. Problemi Anlayalım

- Verilenler ve isteneni belirleyelim.

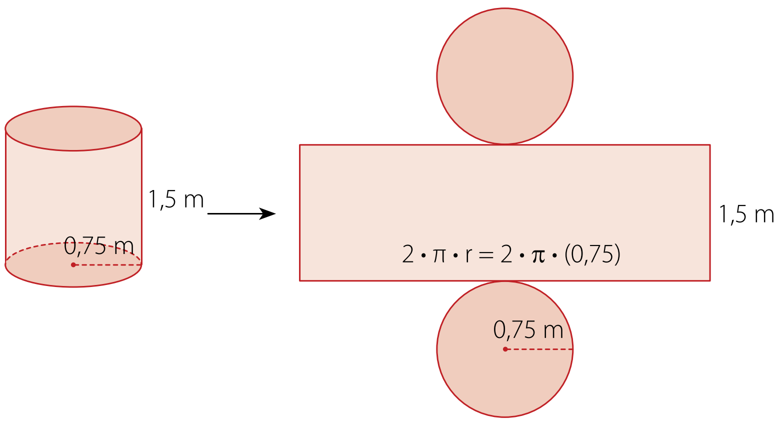
Verilenler	İstenen
Dik dairesel silindirin yüksekliği: 1,5 m Dik dairesel silindirin yarıçapı: 0,75 Boyanacak dik dairesel silindir sayısı: 5	Boyanacak toplam alan: ?

- Problemi özet olarak yazalım.
  5 varilin dış yüzü boyanacaktır. Bir varilin yüzey alanını bulup 5 ile çarparız.

Dik dairesel silindirin yüksekliği: 1,5 m	Dik dairesel silindirin yarıçapı: 0,75 m	Dik dairesel silindirin yüzey alanı: ?	Boyanacak toplam alan: ?

- Problemin şemasını çizelim.

Dik dairesel silindirin açınımını çizelim. Daha önceki bilgilerimize göre bir cismi oluşturan yüzlerin alanlarının toplamı geometrik cismin yüzey alanıdır.



2. Çözümü Planlayalım

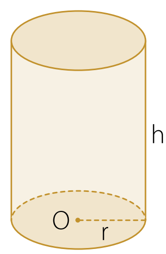
Dik dairesel silindirin yüzey alanı bağıntısından yararlanarak bir varilin yüzey alanını hesaplayalım. Sonra bu yüzey alanını 5 ile çarparak problemde isteneni bulalım.

Bilgi Kutusu

Dik dairesel silindirin
yüzey alanı = (2 • Taban alanı) + (Yanal alan)

Taban alanı = $r^2 \cdot \pi$

Yanal alan = $2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$



Dik dairesel silindirin
yüzey alanı = $(2 \cdot r^2 \cdot \pi) + (2 \cdot r \cdot \pi \cdot h)$
$= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

3. Planı Uygulayalım

h = 1,5 m   r = 0,75 m

Taban alanı: $\pi \cdot r^2$

$= 3 \cdot 0{,}75^2$

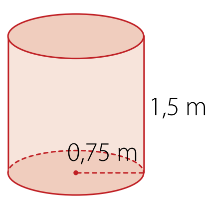
$= 1{,}6875 \text{ m}^2$

Yanal alan: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$= 2 \cdot 3 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}5$

$= 4{,}5 \cdot 1{,}5$

$= 6{,}75 \text{ m}^2$



Yüzey alanı = (2 • Taban alanı) + (Yanal alan)

$= (2 \cdot 1{,}6875) + 6{,}75$

$= 3{,}375 + 6{,}75$

$= 10{,}125 \text{ m}^2$

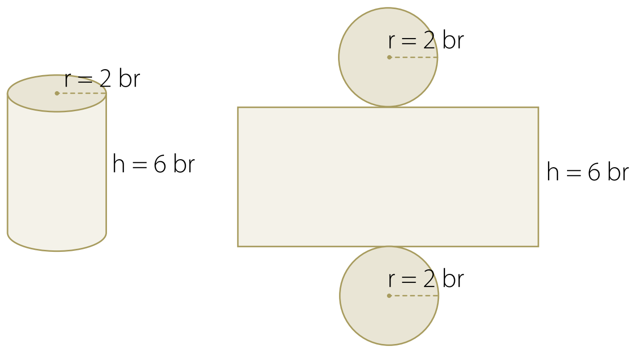
Bir varilin yüzey alanı = $10{,}125 \text{ m}^2$

5 varilin yüzey alanı = $5 \cdot 10{,}125$

$= 50{,}625 \text{ m}^2$ olur.

Etkinlik

- Aşağıda ayrıtları verilen dik dairesel silindiri ve açınımını inceleyiniz.



- Verilen ayrıtlardan yararlanarak açınımın ayrıtlarını belirleyiniz.
- Açınımdaki dikdörtgensel bölgenin kısa kenar uzunluğu ile dik dairesel silindirin yüksekliği arasındaki ilişkiyi açıklayınız.
  - ✓ Açınımdaki dikdörtgensel bölgenin uzun kenar uzunluğu ile dik dairesel silindirin tabanını oluşturan dairesel bölgenin çevre uzunluğu arasında nasıl bir ilişki vardır?
  - ✓ Dik dairesel silindirin yüzey alanı nasıl bulunur?
  - ✓ Dik dairesel silindirin yüzey alanı ile açınımını oluşturan düzlemsel bölgelerin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

1. Örnek

Yarıçapı 5 cm, yüksekliği 9 cm olan dik dairesel silindirin yüzey alanını bulalım.

Çözüm

$r = 5,\ h = 9$ ise Taban alanı $= \pi \cdot r^2$

$= \pi \cdot 5^2$

$= 25\pi \text{ cm}^2$

Yanal alan = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$= 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 9$

$= 90\pi \text{ cm}^2$

Yüzey alanı = 2 • Taban alanı + Yanal alanı

$= (2 \cdot 25\pi) + 90\pi = 50\pi + 90\pi = 140\pi \text{ cm}^2$ olur.

Sıra Sizde

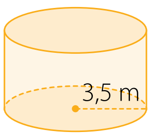
Aşağıda ayrıtları verilen dik dairesel silindirlerin yüzey alanlarını bulunuz.

a) Yarıçap: 10 cm   Yükseklik: 8 cm

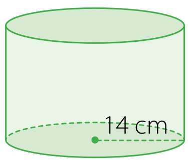
b) Yarıçap: 0,5 m   Yükseklik: 1,2 m

2. Örnek

Aşağıdaki dik dairesel silindirlerin yüzey alanlarını bulalım. ($\pi = \frac{22}{7}$ alalım.)



I. Şekil



II. Şekil

Çözüm

I. Şekil

$r = 3{,}5$ m $h = 4$ m

Taban alanı = $\pi \cdot r^2$

$= \frac{22}{7} \cdot (3{,}5)^2$

$= 38{,}5 \text{ m}^2$

Yanal alan = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$= 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 3{,}5 \cdot 4 = 88 \text{ m}^2$

Yüzey alanı = $(2 \cdot 38{,}5) + 88$

$= 77 + 88$

$= 165 \text{ m}^2$

II. Şekil

$r = 14$ cm $h = 18$ cm

Taban alanı = $\pi \cdot r^2$

$= \frac{22}{7} \cdot 14^2$

$= 616 \text{ cm}^2$

Yanal alan = $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$= 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 14 \cdot 18$

$= 1584 \text{ cm}^2$

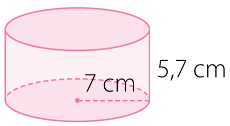
Yüzey alanı = $(2 \cdot 616) + 1584$

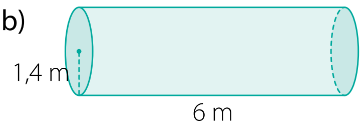
$= 1232 + 1584$

$= 2816 \text{ cm}^2$

Sıra Sizde

Aşağıdaki dik dairesel silindirlerin yüzey alanlarını bulunuz. ($\pi = \dfrac{22}{7}$ alınız.)

a) 

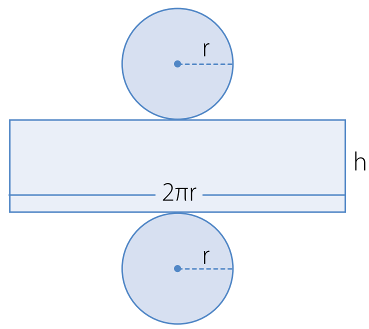
b) 

3. Örnek

Yarıçapı 30 cm ve yüzey alanı 4800 π cm^2 olan dik dairesel silindirin yüksekliğini bulalım.

Çözüm

Dik dairesel silindirin açınımını çizelim.



$$\begin{aligned}
\text{Taban alanı} &= \pi \cdot r^2 \\
&= \pi \cdot 30^2 \\
&= 900\pi \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Yanal alan} &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\
&= 2 \cdot \pi \cdot 30 \cdot h \\
&= 60 \cdot h \cdot \pi \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

$$\text{Yüzey alanı} = (2 \cdot 900\pi) + 60h\pi = 4800\pi$$

$$60h\pi = 4800\pi - 1800\pi$$

$$\frac{\cancel{60}h\cancel{\pi}}{\cancel{60\pi}} = \frac{3000\cancel{\pi}}{60\cancel{\pi}}$$

$h = 50$ cm olur.

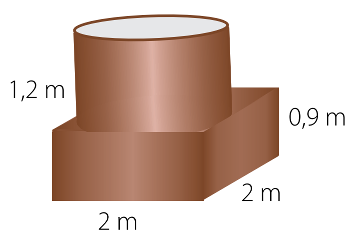
Sıra Sizde

a) Yarıçapı 4 cm ve yüzey alanı 24π cm^2 olan dik dairesel silindirin yüksekliği kaç cm'dir?

b) Yarıçapı 2 m ve yüzey alanı 60 m^2 olan dik dairesel silindirin yüksekliği kaç m'dir? ($\pi = 3$ alınız.)

2. Problem

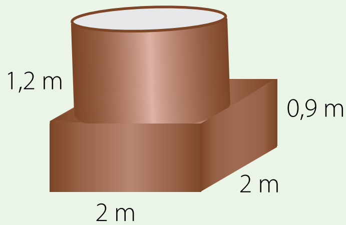
Yandaki şekilde ayrıtları verilen cisim, bakır sac kullanılarak yapılacaktır. Silindirin tabanları açıktır. Cismin silindir biçimindeki kısmını prizma biçimindeki kısma bağlayan yüzey de açıktır. Bu cismin yapımı için kaç m^2 bakır saca ihtiyaç vardır? ($\pi = 3$ alınız.)



Çözüm

1. Problemi Anlayalım

- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve isteneni belirleyelim.

Verilenler	İstenen
	Kullanılacak sac miktarı: ?

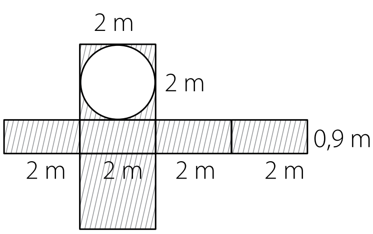
- Problemi özet olarak yazalım.

Kare prizmanın taban ayrıtı	Kare prizmanın yüksekliği	Dik dairesel silindirin yüksekliği	Dik dairesel silindirin yarıçapı	Kare prizmanın yüzey alanı
2 m	0, 9 m	1,2 m	?	?

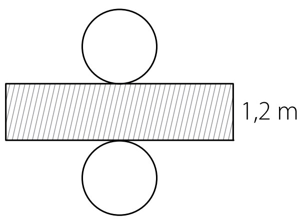
Dik dairesel silindirin yanal alanı	Dik dairesel silindirin taban alanı	Kullanılacak sac miktarı
?	?	?

- Problemin şemasını çizelim.

Cismin düzleme açınımını çizelim.



Kare prizmanın açınımı



Dik dairesel silindirin açınımı

Açınımlarda taralı bölgeler kullanılarak cisim yapılacaktır.

2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi bağıntıları ve matematik işlemlerini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

Kare prizmanın ve dik dairesel silindirin yanal alanlarını bulup toplamalıyız. Yapılacak cisimde dik dairesel silindirin tabanları için sac kullanılmayacaktır. Ayrıca kare prizmanın bir tabanından dik dairesel silindirin bir taban alanını çıkarmalıyız.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

  Kare prizmanın yüzey alanı = $(2 \cdot 2^2) + (4 \cdot 2 \cdot 0{,}9) = \triangle$

  Dik dairesel silindirin yarıçapı = $2 : 2 = \square$

  Dik dairesel silindirin yan yüz alanı = $2 \cdot \pi \cdot \square \cdot 1{,}2 = \bigcirc$

  Dik dairesel silindirin bir taban alanı = $\pi \cdot \square^2 = \star$

  Toplam sac kullanılacak alan = $\triangle + \bigcirc - \star = \triangledown$

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

  Kare prizmanın yüzey alanı: $2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 \cdot 0{,}9 = 15{,}2 \text{ m}^2$

  Dik dairesel silindirin yarıçapı: $r = 2 : 2 = 1$ m

  Dik dairesel silindirin yan yüzey alanı = $2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 1{,}2 = 2 \cdot 3 \cdot 1{,}2 = 7{,}2 \text{ m}^2$

  Dik dairesel silindirin bir taban alanı = $\pi r^2 = 3 \cdot 1^2 = 3 \text{ m}^2$

  Toplam sac kullanılacak alan = Kare prizmanın yüzey alanı + Dik dairesel silindirin yan yüzey alanı – Dik dairesel silindirin bir taban alanı

  $$= 15{,}2 + 7{,}2 - 3 = 19{,}4 \text{ m}^2$$

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

  Kare prizmanın ve dik dairesel silindirin toplam yüzey alanını bulup dik dairesel silindirin taban alanlarını ve kare prizmanın tabanından kesilen kısmı çıkaralım.

  Kare prizmanın yüzey alanı: (2 x taban alanı) + yan yüz alanı

  $$= (2 \cdot 2^2) + (4 \cdot 2 \cdot 0{,}9)$$
  $$= 8 + 7{,}2 = 15{,}2 \text{ m}^2$$

  Dik dairesel silindirin yüzey alanı: 2 x taban alanı + yan yüz alanı

  $$= (2 \cdot \pi \cdot 1^2) + (2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 1{,}2)$$
  $$= (2 \cdot 3 \cdot 1) + (2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1{,}2)$$
  $$= 6 + 7{,}2$$
  $$= 13{,}2 \text{ m}^2$$

  Dik dairesel silindirin taban alanları toplamı: $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \text{ m}^2$

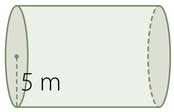
  Kullanılan sac: $15{,}2 + 13{,}2 - 6 - 3 = 19{,}4 \text{ m}^2$

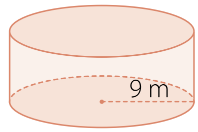
  Bulunan sonuç doğrudur.

Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Şekilde verilen ve yarıçapı 0,8 m olan silindir biçimindeki varil 28 kez döndürülüyor. Kaç metre yol alır?

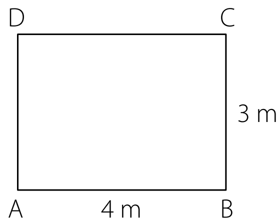
2. Yandaki dik dairesel silindirlerin yüzey alanlarını yazınız. ($\pi = \frac{22}{7}$ alınız.)





Yüzey alanı: .... Yüzey alanı: ....

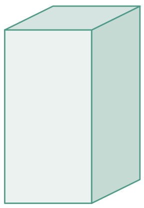
3. Kenar uzunlukları 3 ve 4 m olan, yanda şekli verilen sacın, DA ve CB kenraları birleştirilecek ve oluşan şeklin altı kapatılacaktır. Elde edilen dik dairesel silindir şeklindeki kabın içi ve dışı boyanacaktır. Ne kadarlık alan boyanır?

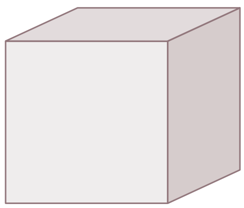


6.2.4. Dik Dairesel Silindirin Hacmi

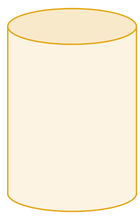
Etkinlik

- Aşağıdaki kare prizma ve küpün hacim bağıntılarını önceki bilgilerinizden yararlanarak yazınız.
- Hacim bağıntılarını nasıl yazdığınızı açıklayınız.





- Hacim bağıntısını yazarken geometrik cismin taban alanı ile yüksekliğinden nasıl yararlandınız?
- Yukarıdaki geometrik cisimlerin hacim bağıntılarını yazarken yaptıklarınızdan yararlanarak yandaki dik dairesel silindirin hacmini nasıl bulabileceğinizi düşününüz.



✓ Dik dairesel silindirin hacmi ile taban alanı ve yüksekliği arasında nasıl bir ilişki olabilir? Düşününüz.

✓ Dik dairesel silindirin hacmini bulmak için geometrik cisimlerde olduğu gibi silindirin taban alanı ve yüksekliğinden yararlanabilir miyiz? Nasıl?

✓ Geometrik cisimlerin hacimleri, taban alanları ile yüksekliklerin çarpımı ile bulunur. Bu bilgiden yararlanarak dik dairesel silindirin hacim bağıntısını oluşturunuz.

1. Problem

Taban yarıçapı 19 cm, yüksekliği 44 cm olan yandaki kovanın içine en çok kaç litre süt konabilir? ($\pi = 3$ alalım.)

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

Verilenler	İstenen
Kovanın taban yarıçapı: 19 cm Kovanın yüksekliği: 44 cm	Kovanın alacağı en fazla süt miktarı: ?

2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi bağıntıları kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  Kovanın hacmini bulmalıyız. Bunun için kovanın taban alanı ile yüksekliğini çarpalım.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

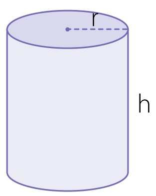
  Kovanın hacmi = Taban alanı • Yükseklik

  $= \pi r^2 \cdot h$

Bilgi Kutusu

Dik silindirin hacmi = (taban alanı) • (yükseklik)

Dik silindirin hacmi = $\pi \cdot r^2 \cdot h$



3. Planı Uygulayalım

- Problemi, bağıntıdan yararlanarak çözelim.

  Kovanın hacmi = Taban alanı • Yükseklik

  $= \pi r^2 \cdot h$

  $= 3 \cdot 19^2 \cdot 44$

  $= 47\,652 \text{ cm}^3$ bulunur.

1. Örnek

Yarıçapı 8 cm, yüksekliği 12 cm olan silindirin hacmini bulalım.

Çözüm

Dik dairesel silindirin hacmi = (taban alanı) • (yükseklik)

Dik dairesel silindirin hacmi = $\pi \cdot r^2 \cdot h$

$= 8^2 \cdot 12 \cdot \pi$

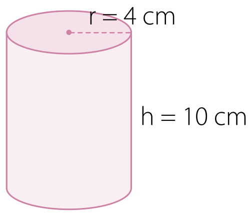
$= 768\pi \text{ cm}^3$ olarak bulunur.

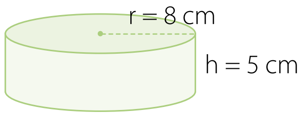
Sıra Sizde

Yarıçapı 5 cm, yüksekliği 8 cm olan dik dairesel silindirin hacmini bulunuz.

2. Örnek

Aşağıdaki dik dairesel silindirlerin hacimlerini bulalım. ($\pi = 3,14$ alalım.)

a)


b)


Çözüm

a) $r = 4$ cm ve $h = 10$ cm olduğuna göre;

$\text{Hacim} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10 = 502,4\ cm^3$ olur.

b) $r = 8$ cm ve $h = 5$ cm olduğundan;

$\text{Hacim} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 8^2 \cdot 5 = 1004,8\ cm^3$ olur.

3. Örnek

Hacmi $180\ cm^3$, taban yarıçapı 5 cm olan dik dairesel silindirin yüksekliğini bulalım. ($\pi = 3$ alalım.)

Çözüm

$\text{Hacim} = \pi \cdot r^2 \cdot h$ formülünde verilenleri yerine yazalım.

$180 = 3 \cdot 5^2 \cdot h$

$h = 180 : 75$

$h = 2,4$ cm bulunur.

2. Problem

Taban ayrıtı 24 cm ve yüksekliği 50 cm olan kare prizma şeklindeki bir sütunun kenarları tıraşlanarak en büyük hacimli dik dairesel silindir elde edilecektir.

a) Dik dairesel silindirin hacmi kaç cm^3tür?

b) Sütunun ne kadarlık kısmı tıraşlanmıştır? ($\pi = 3$ alalım.)

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

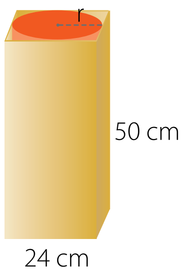
- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve istenenleri belirleyelim.

Verilenler	İstenenler
Kare prizmanın taban ayrıtı: 24 cm	Dik dairesel silindirin hacmi: ?
Kare prizmanın yüksekliği: 50 cm	Sütunun tıraşlanan kısmı: ?

- Problemi özet olarak yazalım.

Kare prizmanın taban ayrıtı	Kare prizmanın yüksekliği	Kare prizmanın hacmi	Dik dairesel silindirin yarıçapı	Dik dairesel silindirin yüksekliği	Dik dairesel silindirin hacmi	Tıraşlanan kısım
24 cm	50 cm	?	?	?	?	?

- Problemin şemasını çizelim.



2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemlerini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım. Kare prizmanın ve dik dairesel silindirin hacmini bulmak için çarpma, tıraşlanan kısmı bulmak için ise çıkarma işlemlerini kullanırız.
- Problemin matematik cümlesini yazalım.

Kare prizmanın hacmi: $24 \cdot 24 \cdot 50 = \triangle$

Dik dairesel silindirin yarıçapı: $24 : 2 = \bigcirc$

Dik dairesel silindirin yüksekliği: $\bigtriangledown$

Dik dairesel silindirin hacmi: $\bigcirc^2 \cdot \bigtriangledown \cdot \pi = \heartsuit$

Tıraşlanan kısım: $\bigtriangleup - \heartsuit = \square$

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

  Kare prizmanın hacmi: $24 \cdot 24 \cdot 50 = 28\,800$ cm^3

  Dik dairesel silindirin yarıçapı: $24 : 2 = 12$ cm

  Dik dairesel silindirin yüksekliği: 50 cm

  Dik dairesel silindirin hacmi: $12^2 \cdot 50 \cdot \pi = 7200 \cdot 3 = 21\,600$ cm^3

  Tıraşlanan kısım: $28\,800 - 21\,600 = 7200$ cm^3

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Problemin sonucunu kontrol edelim ve çözümün doğru yapıldığından emin olalım.

  Tıraşlanan kısım ile dik dairesel silindirin hacmini topladığımızda kare prizmanın hacmini bulmalıyız.

  Dik dairesel silindirin hacmi: 21 600 cm^3

  Tıraşlanan kısım: 7200 cm^3

  Toplam: $21\,600 + 7200 = 28\,800$ cm^3 kare prizmanın hacmine eşittir.

  Bu durumda bulunan sonuç doğrudur.

3. Problem

Taban yarıçapı 10 cm, yüksekliği 25 cm olan dik dairesel silindir şeklindeki bir kabın $\frac{4}{5}$'ine kadar tuzlu su, kalan kısmına ise sirke konarak turşu suyu hazırlanacaktır. Bu kaba kaç cm^3 sirke konacaktır? ($\pi = 3$ alalım.)

Çözüm

1. Problemi Anlayalım

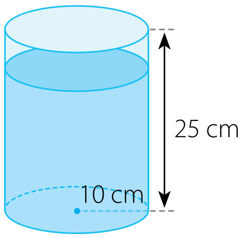
- Problemi kurallara uygun olarak okuyunuz.
- Problemi kendi cümlelerinizle açıklayınız.
- Problemde verilenleri ve isteneni belirleyelim.

Verilenler	İstenen
Dik dairesel silindirin yarıçapı: 10 cm Dik dairesel silindirin yüksekliği: 25 cm Kaba konulan tuzlu su miktarı: Kavanozun yüksekliğinin $\frac{4}{5}$'i	Kavanozdaki sirke miktarı: ?

- Problemi özet olarak yazalım.

Dik dairesel silindirin yarıçapı	Dik dairesel silindirin yüksekliği	Tuzlu su konulan kısmın yüksekliği	Sirke konulan kısmın yüksekliği	Sirke miktarı
10 cm	25 cm	?	?	?

- Problemin şemasını çizelim.



2. Çözümü Planlayalım

- Problemi çözmek için hangi matematik işlemlerini kullanacağımızı gerekçeleri ile açıklayalım.

  Kavanozun hacmini ve sirke miktarını bulmak için çarpma işlemi kullanırız.

- Problemin matematik cümlesini yazalım.

  Kabın hacmi: $10^2 \cdot \pi \cdot 25 = \triangle$

  Sirke konulan kısım: $1 - \frac{4}{5} = \square$

  Sirke miktarı: $\triangle \cdot \square = \bigcirc$

3. Planı Uygulayalım

- Problemi, matematik cümlesinden yararlanarak çözelim.

  Kabın hacmi: $10^2 \cdot 3 \cdot 25$

  $= 7500 \text{ cm}^3$

  Sirke konulan kısmın yüksekliği: $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

  Sirke miktarı: $7500 \cdot \frac{1}{5} = 1500 \text{ cm}^3$tür.

4. Çözümün Doğruluğunu ve Geçerliğini Kontrol Edelim

- Kabın hacmini bularak içine konulacak sıvı miktarını bulalım. Bu sıvının $\frac{4}{5}$'i tuzlu su, kalanı ise sirkedir.

  Kabın hacmi $= 10^2 \cdot 3 \cdot 25$

  $= 7500 \text{ cm}^3$

  $7500 \cdot \frac{4}{5} = 6000 \text{ cm}^3$ (Tuzlu su miktarı)

  $7500 - 6000 = 1500 \text{ cm}^3$ (Sirke miktarı)

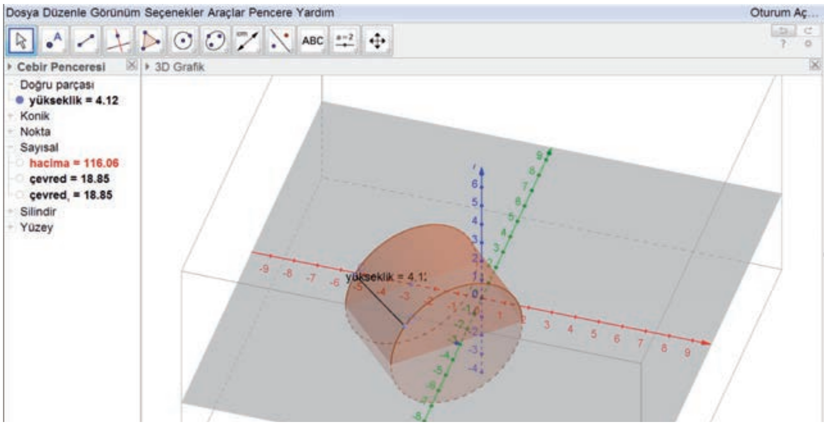
  O hâlde bulunan sonuç doğrudur.

4. Örnek

Dinamik geometri programından yararlanarak bir silindir çizelim ve bu silindirin hacmini hesaplayalım.

Çözüm

"Silindir" sekmesinden yararlanarak silindir çizelim. Çizdiğimiz silindirin hacmini hesaplatmak için “Hacim” sekmesine tıklayalım. Ekranın sol tarafında “hacim a = 116,06” olarak görünür. Sizin çizdiğiniz silindire göre hacim değişebilir.



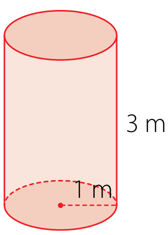
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

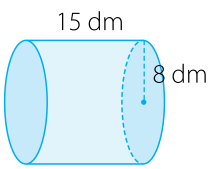
1. Bir otomobil pistonundaki dik dairesel silindirin yarıçapı 4,8 cm, yüksekliği 5,2 cm'dir. Otomobilde 4 silindir olduğuna göre motorun hacmi kaç cm^{3}tür? ($\pi = 3$ alınız.)

2. Taban yarıçapı 2,5 cm ve yüksekliği 6 cm olan dik dairesel silindir biçimindeki bir bardağın $\frac{1}{5}$'ine kadar çay demi, kalanına da su konacaktır. Bardağın içine kaç cm^3 su konulmuştur? ($\pi = 3$ alınız.)

3. Taban alanı 18 cm^2, yüksekliği 3 cm olan dik dairesel silindirin hacmi kaç cm^{3}tür?

4. Aşağıdaki dik dairesel silindirlerin hacimlerini bulunuz.





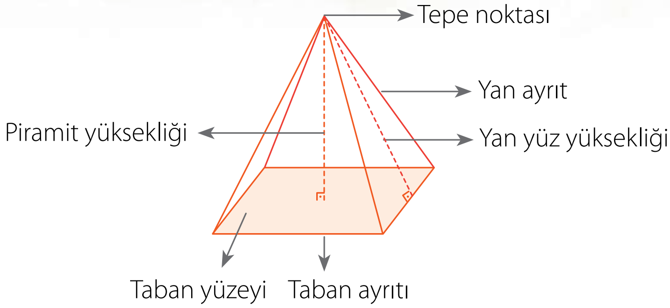
5. Yanda verilen petrol tankının taban yarıçapı 100 dm, yüksekliği 80 dm'dir. Bu tank, kaç litre petrol alır? (π = 3,14 alınız.)

6.2.5. Dik Piramit

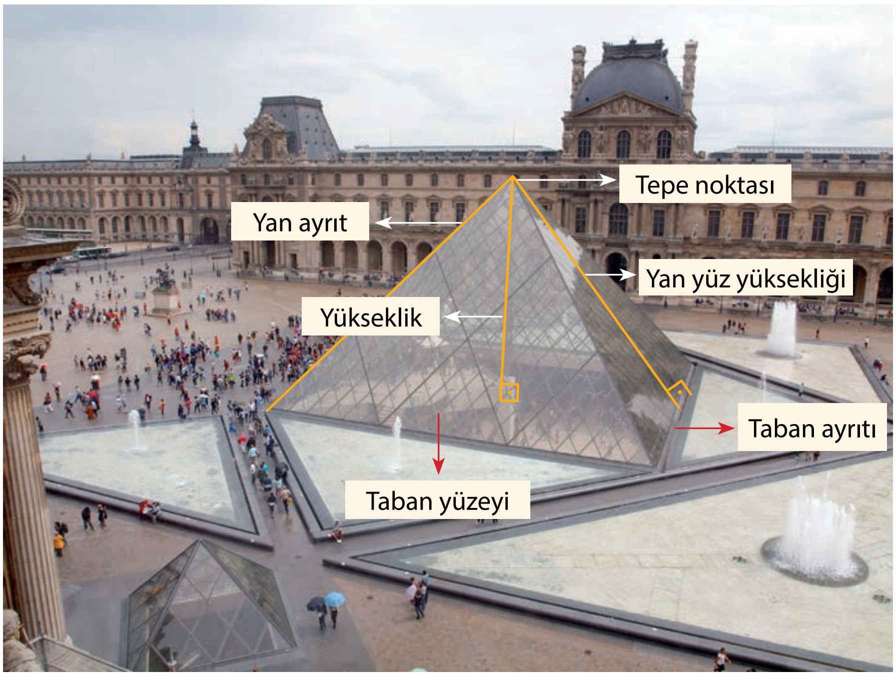
Antalya'da bulunan "Cam Piramit", 1 Ekim 1997'de hizmete açılmıştır. Kongre ve kültür merkezi olarak kullanılmaktadır. "Cam Piramit"in taban alanı 3000 m^2, yüksekliği ise 22,76 m'dir.

En eski piramitlerin Mısır'da inşa edildiği bilinmektedir. Tarihte ve günümüzde yer alan piramit biçimindeki yapılar, diğer yapılardan farklıdır. Günümüzde, birçok ülkede modern mimari olarak piramit biçiminde çokça yapı vardır. Aynı zamanda, bazı eşyaların tasarımında da piramit şekli kullanılmaktadır. Yanda piramit biçiminde tasarlanmış eşya örnekleri görülmektedir.

Piramitler, tabanlarını oluşturan çokgensel bölgelere göre adlandırılır (Üçgen piramit, kare piramit, beşgen piramit gibi.). Piramitlerin yan yüzleri üçgensel bölgelerdir. Tepe noktasını taban merkezine (ağırlık merkezi) birleştiren doğru parçası tabana dik ise bu piramide **dik piramit** denir. Bu doğru parçasının uzunluğu da piramidin yüksekliğidir.



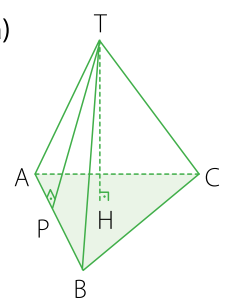
Aşağıda, Paris'teki Louvre (Luğva) Müzesi'nin girişinde bulunan piramit görülmektedir. Bu piramidin temel elemanlarını belirleyelim.



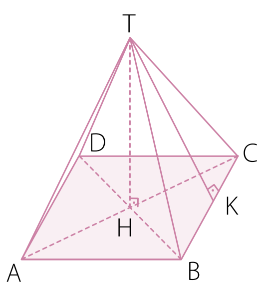
1. Örnek

Aşağıdaki piramitlerin temel elemanlarını belirleyelim.

a)

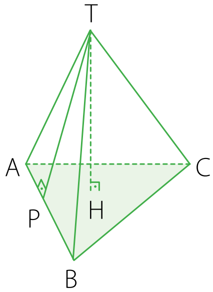


b)



Çözüm

a)



Taban: ABC üçgeni

T: tepe noktası

Yan yüzler: $\widehat{BTC}$, $\widehat{CTA}$, $\widehat{ATB}$

Yükseklik: |TH|

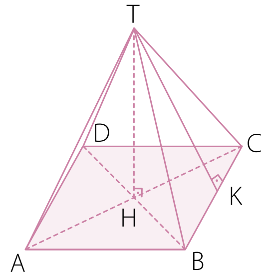
Yan yüz yüksekliği: |TP|

Üçgen dik piramittir.

Taban ayrıtları: [AB], [AC], [BC]

Yan yüz ayrıtları: [TA], [TB], [TC]

b)



Taban: ABCD karesi

T: tepe noktası

Yan yüzler: $\widehat{BTC}$, $\widehat{CTD}$, $\widehat{DTA}$, $\widehat{ATB}$

Taban kare olduğundan yan yüzleri eştir.

Yükseklik: |TH|

Yan yüz yüksekliği: |TK|

Kare dik piramittir.

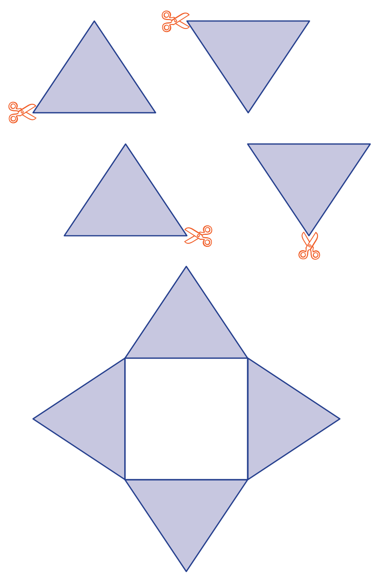
Taban ayrıtları: [AB], [BC], [CD], [DA]

Yan yüz ayrıtları: [TA], [TB], [TC], [TD]

2. Örnek

Mukavva kullanarak piramit inşa edelim ve bu piramidin temel elemanlarını belirleyelim.

Çözüm



Mukavva üzerine birbirine eş 4 tane ikizkenar üçgen çizelim. Çizdiğimiz üçgenleri keserek ayıralım.

Üçgenlerin tabanlarını birer doğru parçası olarak kullanıp kare oluşturalım. Üçgenlerin yan kenarlarını bir noktada birleştirerek yapıştıralım.

Böylece bir kare piramit inşa etmiş olduk. Bu kare piramidin temel elemanlarını yazalım.

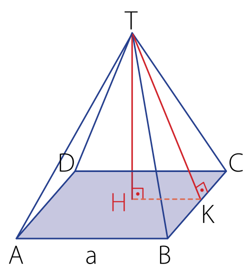
Taban: ABCD karesi

T: Tepe noktası

Yan yüzler: $\widehat{ADT}$, $\widehat{BCT}$, $\widehat{ABT}$, $\widehat{DTC}$

Yükseklik: |TH|

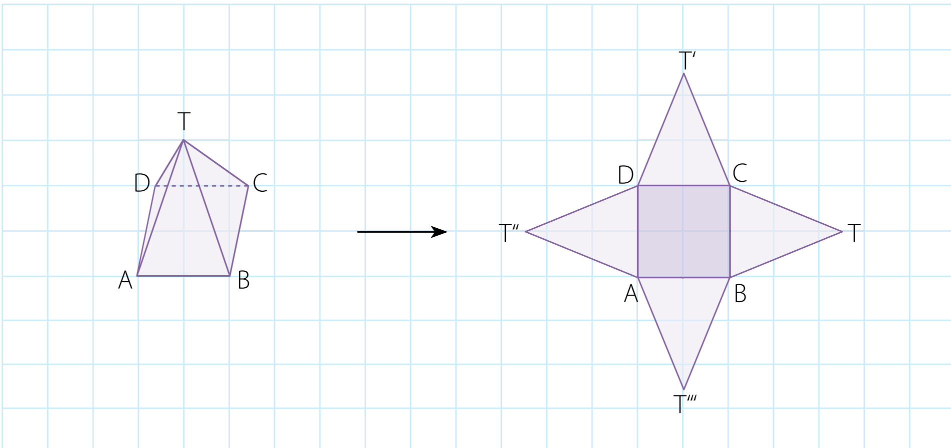
Yan yüz yüksekliği: |TK|



Etkinlik

Araç ve Gereç: dik piramit biçimindeki kutular (kare dik piramit, üçgen dik piramit vb.), makas, kalem, kareli kâğıt

- Kare dik piramit biçimindeki kutuyu yan yüzlerinden keserek düzleme açalım.
- Düzleme açılan şekli, kareli kâğıt üzerine koyarak çizelim.
- Diğer dik piramitleri yan ayrıtları boyunca keserek düzleme ayırınız. Düzleme açtığınız geometrik şekilleri kareli kâğıt üzerine koyarak çiziniz.



✓ Dik piramitlerin açınımı nasıl çizilir?

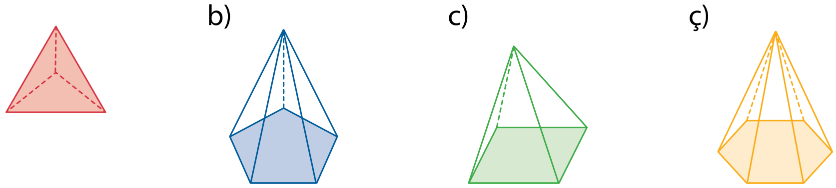
- Çizdiğiniz açınımlarda yan ayrıtları ölçerek karşılaştırınız.

✓ Tabanları düzgün olan dik piramitler ile tabanları düzgün olmayan dik piramitlerin yan ayrıtları arasında nasıl bir ilişki vardır? Arkadaşlarınızla tartışınız.

3. Örnek

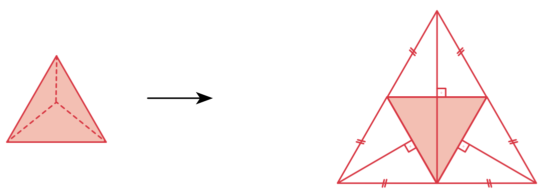
Aşağıdaki dik piramitlerin açınımlarını çizelim.

a) b) c) ç)

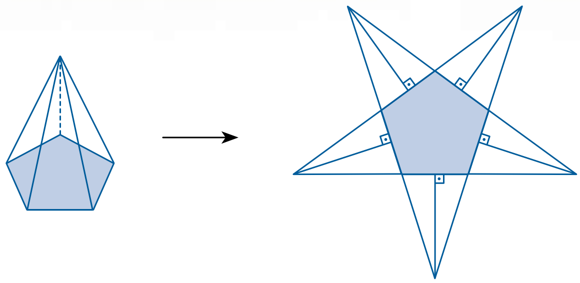


Çözüm

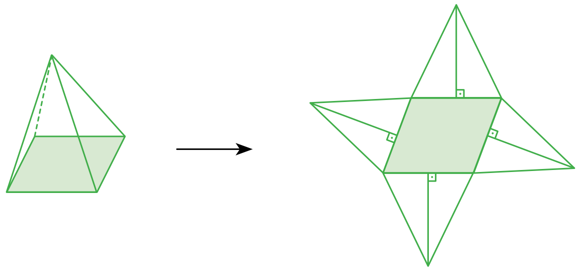
a) Tabanı eşkenar üçgen olduğundan bu piramit, eşkenar üçgen dik piramittir.



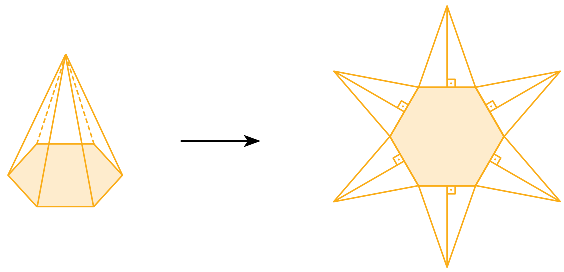
b) Tabanı beşgen olduğundan bu piramit, beşgen dik piramittir.



c) Tabanı paralelkenar olduğundan bu piramit, paralelkenar dik piramittir.



ç) Tabanı altıgen olduğundan bu piramit, altıgen dik piramittir.

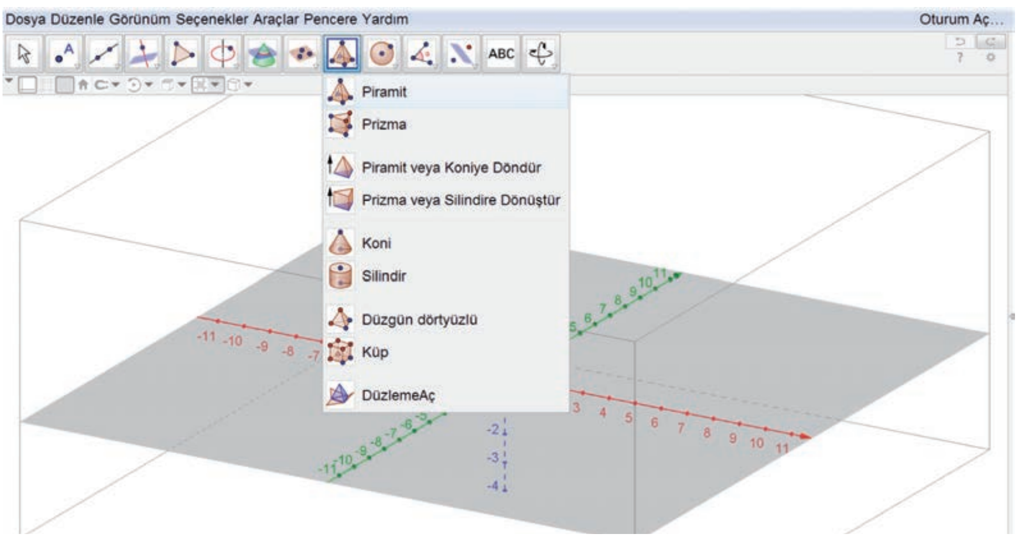


4. Örnek

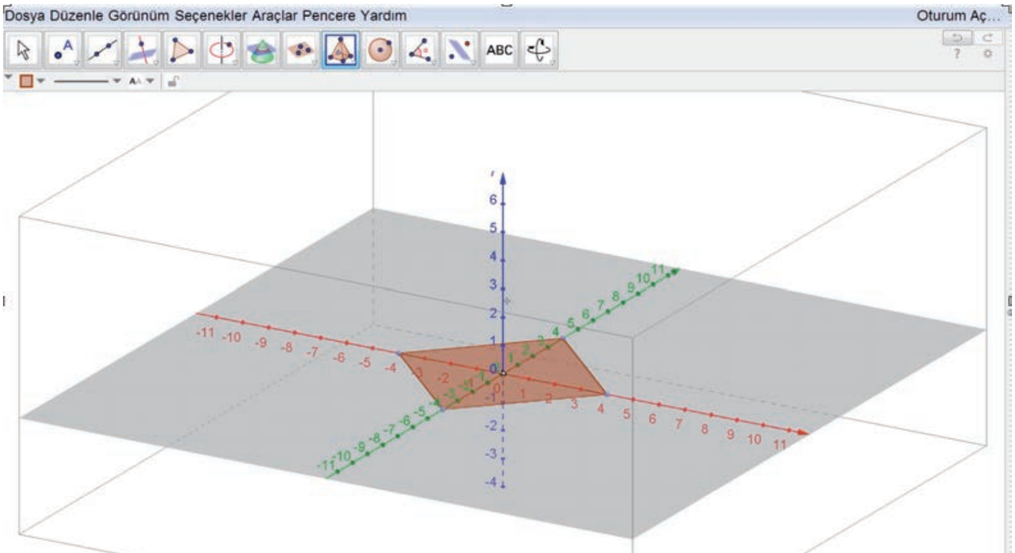
Bir dinamik geometri yazılımından yararlanarak dik piramit çizelim.

Çözüm

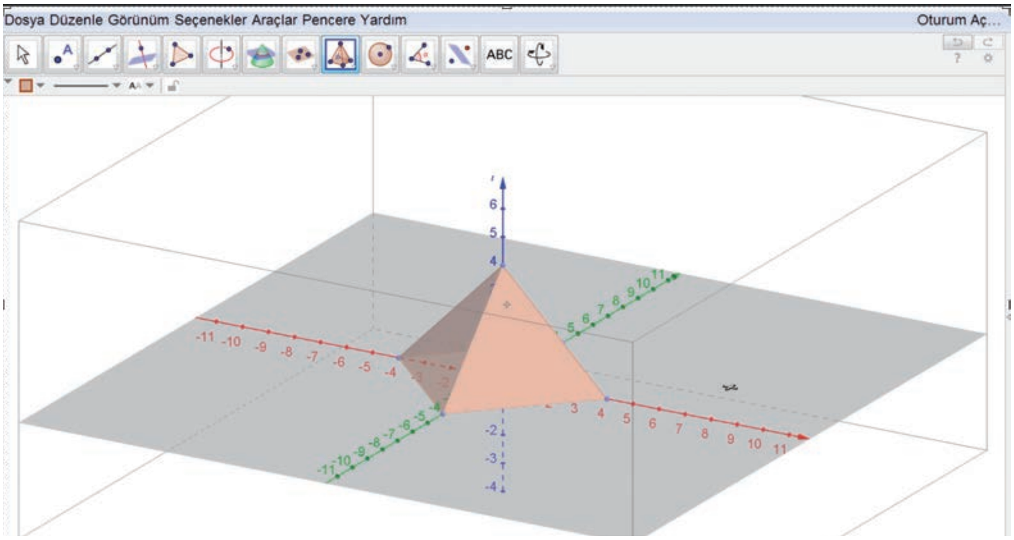
Bir dinamik geometri yazılımında "3D Grafik" sekmesini seçelim:



"Piramit" sekmesini seçip tabanı kare olarak oluşturalım:

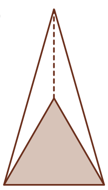


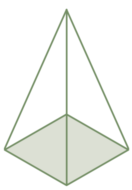
Tepe noktasını çekerek piramidi oluşturalım.

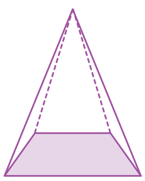


Sıra Sizde

Aşağıdaki dik piramitlerin açınımlarını bir dinamik geometri yazılımından yararlanarak çiziniz.

a) 

b) 

c) 

6.2.6. Dik Koni

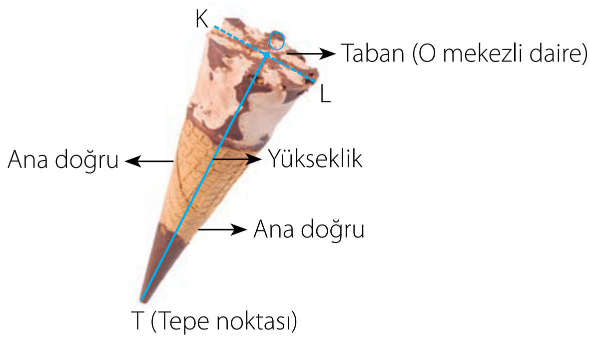
Koni, ülkemizde ve dünyada, tarihî binalar ve günümüz binalarında sıkça kullanılmıştır. Tarihî Galata Kulesi'nde, Eskişehir Sazova Parkı'nda bulunan Masal Şatosu'nda ve cami minarelerinde koni kullanılmıştır.



Ayrıca dondurma külahı, trafik konisi, parti şapkaları da koni şeklindedir.



Aşağıda yer alan koni şeklindeki dondurma ve dondurma külahının temel elemanlarını belirleyelim.



Bilgi Kutusu

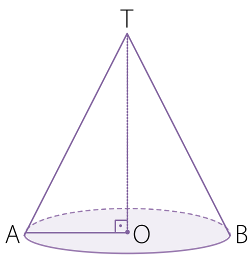
Aşağıda verilen dairesel dik konide;

T, tepe noktası

Taban, O merkezli daire,

|OT| koninin yüksekliği,

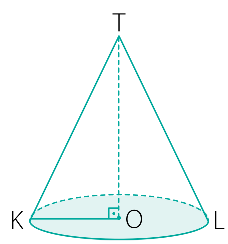
|OA| = |OB| koninin yarıçapıdır.



Taban dairesinin çemberi üzerinde bulunan noktaları tepe noktası ile birleştiren doğru parçalarına koninin ***ana doğruları*** *denir. [TA] ve [TB], O merkezli dik koninin ana doğrularıdır.*

1. Örnek

Yandaki koninin temel elemanlarını belirleyelim.



Çözüm

Tepe noktası: T

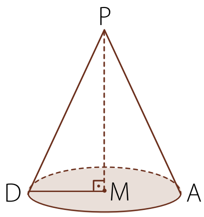
Taban: O merkezli daire

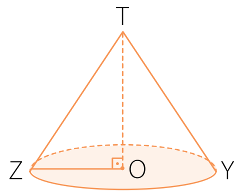
Ana doğru: [TK], [TL]

Yükseklik: |TO|

Sıra Sizde

Aşağıdaki konilerin temel elemanlarını belirleyiniz.



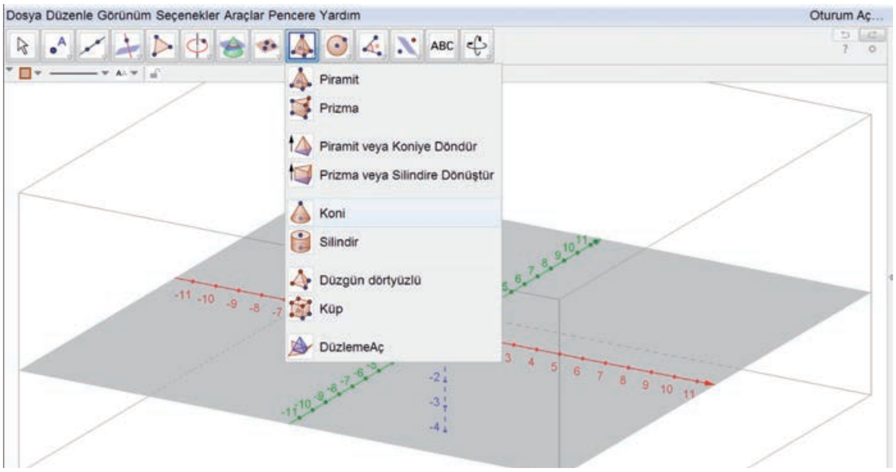


2. Örnek

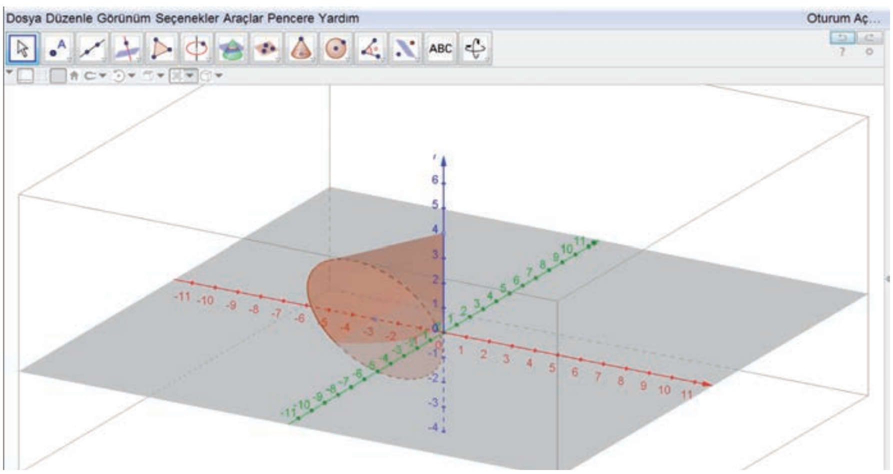
Bir dinamik geometri yazılımında dik koni çizelim.

Çözüm

Bir dinamik geometri yazılımında "3D Grafik "sekmesini seçelim.



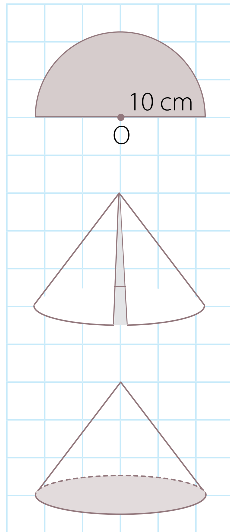
Biri tepe noktası olmak üzere iki nokta seçelim ve yarıçap uzunluğu girelim. Koniyi inşa edelim.



Etkinlik

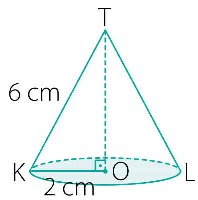
Araç ve Gereç: kareli kâğıt, cetvel, pergel, makas, yapıştırıcı

- Kareli kâğıt üzerine yarıçapı 10 cm olan bir daire çiziniz.
- Dairenin yarısını keserek ayırınız.
  - ✓ Yarım daireyi yarı çapları boyunca birleştirerek yuvarlayınız.
  - ✓ Oluşan cismi kareli kâğıt üzerine koyarak dairenin kenarlarından çiziniz.
- Çizdiğiniz daireyi kesiniz.
  - ✓ Daire ile cismi birleştirerek yapıştırınız.
  - ✓ Hangi cismi elde ettiniz.



3. Örnek

Yanda ayrıtları verilen dik koninin açınımını çizelim.



Çözüm

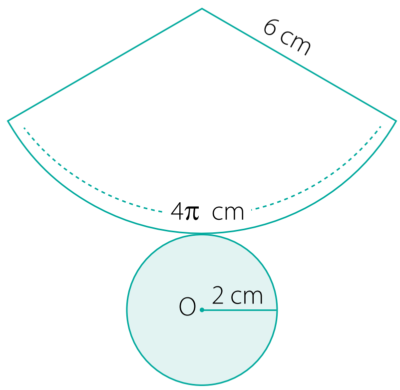
Koninin ana doğrusu 6 cm, taban yarıçapı 2 cm'dir. O hâlde koninin taban çevre uzunluğunu bulalım.

Taban çevre uzunluğu: $2 \cdot \pi \cdot r$

$= 2 \cdot \pi \cdot 2$

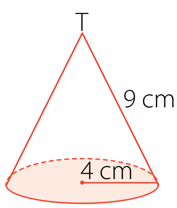
$= 4\pi$ cm olur.

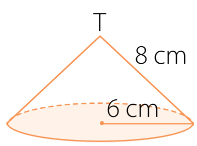
O hâlde daire diliminin yay uzunluğu 4π cm olur.



Sıra Sizde

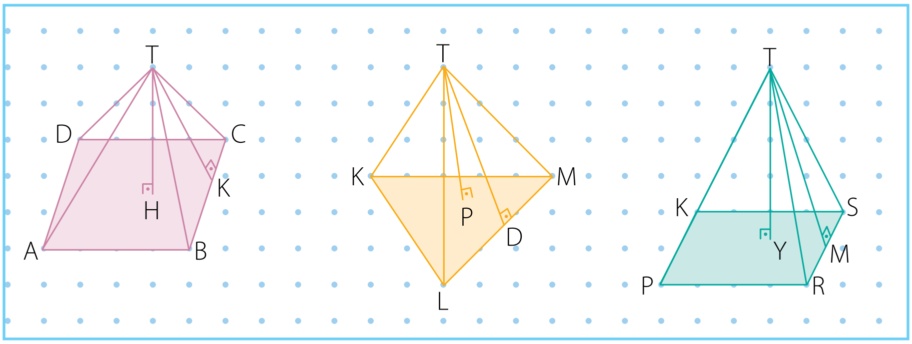
Aşağıda ayrıtları verilen dik konilerin açınımlarını çiziniz.





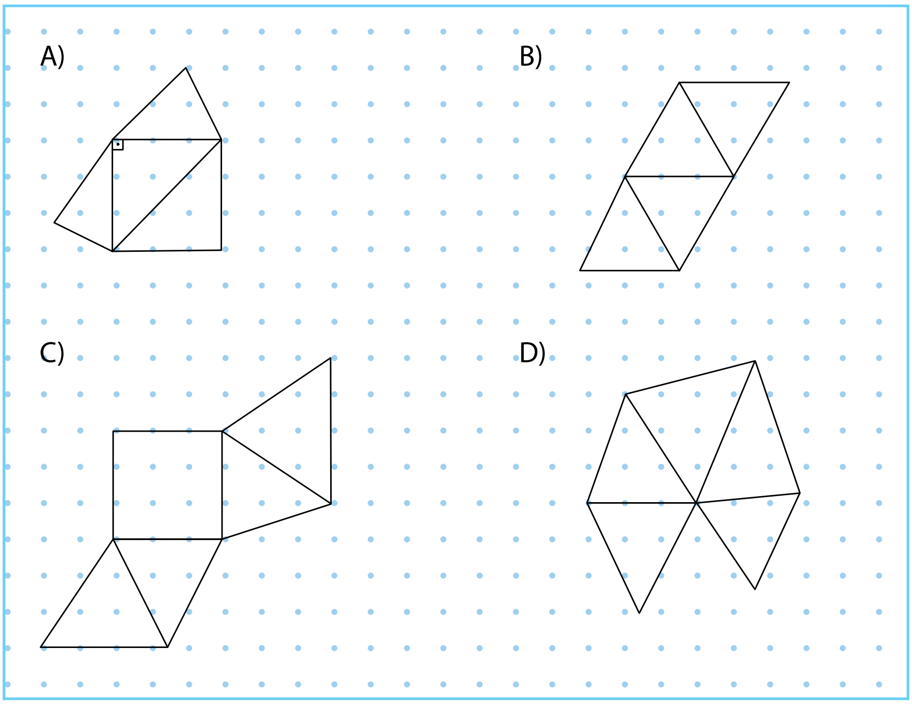
Öğrendiklerimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki dik piramitlerin temel elemanlarını belirleyiniz.

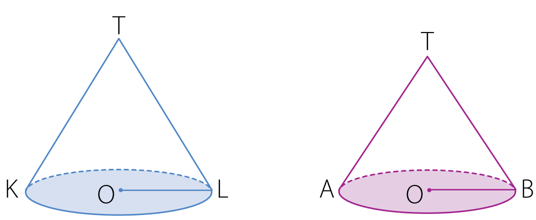


2. Taban ayrıtı 5 cm, yan yüz yüksekliği 4 cm olan bir kare dik piramidin düzleme açınımını çiziniz.

3. Aşağıdaki açınımlardan hangisi eşkenar üçgen piramide ait olabilir?



4. Aşağıdaki dik konilerin temel elemanlarını belirleyerek açınımlarını çiziniz.



6. Ünite Değerlendirme

1. A(–2, –3) noktasının 4 birim sağa ötelenip y eksenine göre yansıtılmış koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, –3) B) (–2, –3)
C) (2, 1) D) (–2, 1)

2. Bir apartmanda taban yarıçapı 2 m, yüksekliği 5 m olan ve taban çapı 4 m, yüksekliği 3 m olan iki su deposu bulunmaktadır. Su depoları tam dolu iken kaç m^3 su alır? ($\pi = 3$)

A) 36 B) 60 C) 96 D) 108

3. 12 dm^3 suyu, taban yarıçapı 10 cm olan silindir şeklindeki bir kaba boşaltmak istersek bu kabın yüksekliği kaç cm olmalıdır? ($\pi = 3$)

A) 40 B) 30 C) 10 D) 10

4. Koordinatları C(3, 0), D(5, 2), E(3, 4), F(1, 2) olan dörtgeni; x ekseninde 3 birim sağa, y ekseninde 4 birim aşağıya ötelediğimizde oluşan yeni koordinatları ile eşleştiriniz.

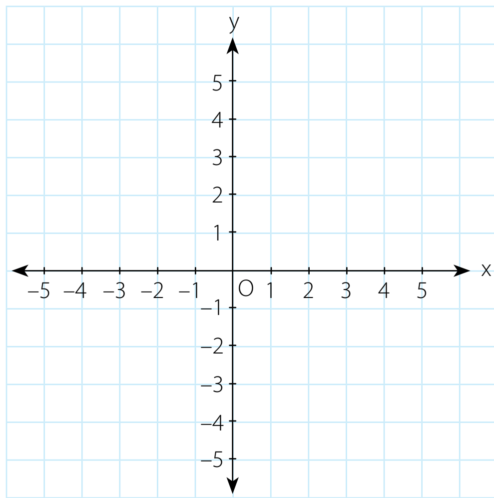
I. C(3, 0)	a) (6, 0)
II. D(5, 2)	b) (4, –2)
III. E(3, 4)	c) (6, –4)
IV. F(1, 2)	ç) (8, –2)

5. A(2, 1) noktasının x eksenine göre yansıması A', A' noktasının 2 birim sağa ötelenmiş hâli A'' olduğuna göre aşağıda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

A(2, 1) → A'(..... , ...)

A'(..... , ...) → A''(..... , ...)

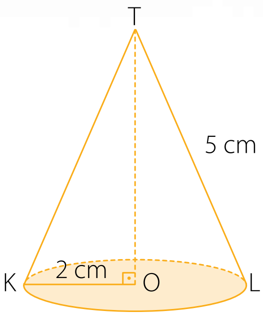
6. Koordinatları A(3, 1), B(3, 3), C(5, 3) ve D(5, 1) olan karenin y eksenine göre yansıma altındaki görüntüsünü çiziniz.



7. Bir silindirin yüksekliği değiştirilmeden çapı %20 artırılırsa hacmi yüzde kaç artar?

A) 20 B) 28 C) 32 D) 44

8.

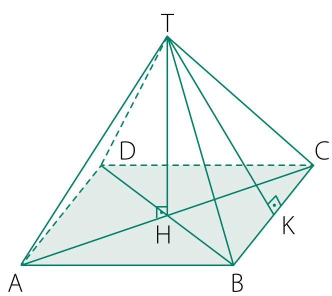


Yukarıda verilen koninin açınımını çiziniz. ($\pi = 3$)

9. 8. soruda verilen koninin temel elemanlarını eşleştiriniz.

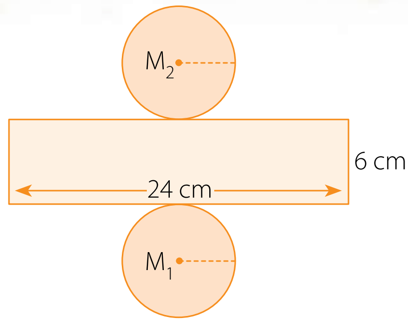
I. T	a) O merkezli daire
II. Taban	b) [TL]
III. Ana doğru	c) |TO|
IV. Yükseklik	ç) Tepe noktası

10.



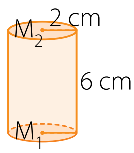
Yukarıdaki piramidin temel elemanlarını belirleyerek açınımını çiziniz.

11.

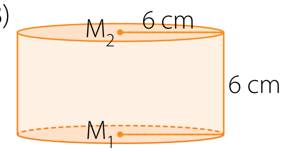


Açınımı verilen dik silindirin inşa edilmiş hâli aşağıdaki seçeneklerden hangisinde doğru verilmiştir? ($\pi = 3$)

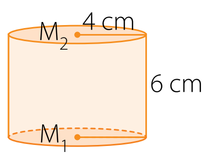
A)



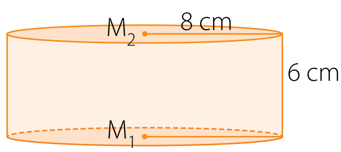
B)



C)



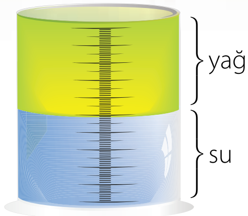
D)



12. Yüzey alanı ile hacmi sayıca eşit olan dik dairesel silindirin taban yarıçapı 4 cm'dir. Buna göre silindirin yüksekliği aşağıdakilerden hangisidir?

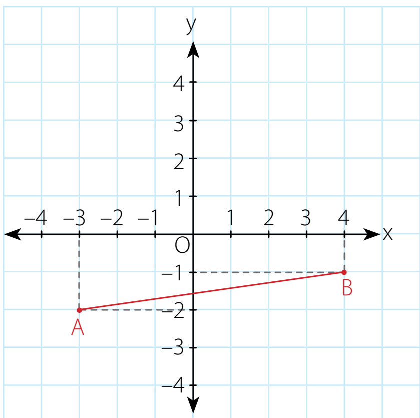
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

13. Yağ ve su, ölçekli bir kaba konuyor. Kabın $\frac{6}{11}$'sı yağdır.
Kaptaki suyun hacmi 360 cm^3 olduğuna göre yağın hacmi kaç cm^{3}tür?



A) 448 B) 440 C) 432 D) 430

14. Aşağıda koordinat sisteminde verilen [AB]'nın, 3 birim sağa, 2 birim yukarı ötelenmesiyle oluşan görüntüsünün koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?



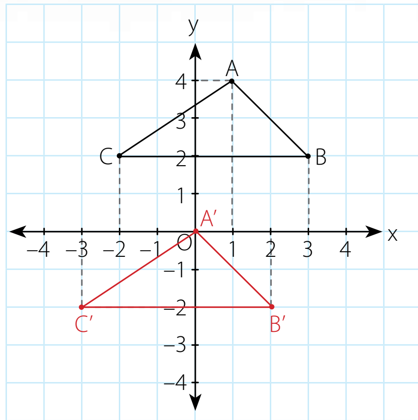
A) A'(–3, 1) B'(6, 1)

B) A'(–3, 1) B'(7, –1)

C) A'(1, 0) B'(7, 1)

D) A'(0, 0) B'(7, 1)

15.



Yukarıdaki koordinat sisteminde verilen ABC üçgeni ötelenerek A'B'C' üçgeni elde edilmiştir. Buna göre yapılan öteleme hareketi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 birim aşağı
2 birim sola

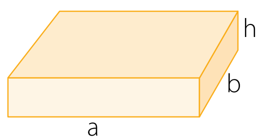
B) 2 birim aşağı
4 birim sola

C) 4 birim aşağı
1 birim sola

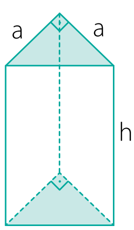
D) 4 birim aşağı
2 birim sola

16. Aşağıda verilen dik prizmaların açınımlarını çiziniz.

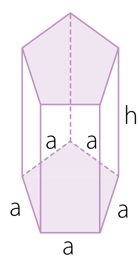
a)



b)



c)



17. **Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri uygun sözcüklerle tamamlayınız.**

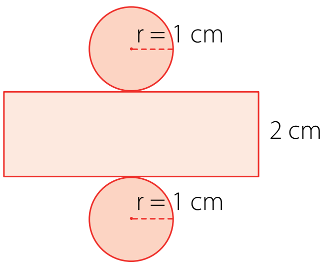
a) Yan yüzleri taban düzlemine dik olan prizmalara, ... denir.

b) Tabanı üçgen olan dik prizmaya, ... denir.

c) Kare dik prizmanın .... yanal yüzü vardır.

ç) Prizmanın yüksekliği, ... arasındaki uzaklıktır.

18.



Açınımı verilen dik silindiri inşa ediniz.

19. **Umut, yanda resmi verilen silindir şeklindeki bir kutunun yan yüzünü süsleyecektir. Tabanının yarıçapı 3 cm, yüksekliği 12 cm olan kutunun süslenecek alanı kaç cm²dir? (π =3)**

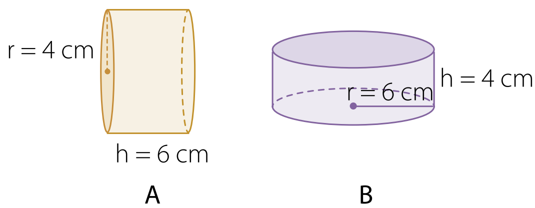
A) 108 B) 216 C) 256 D) 300

20.

Yukarıdaki fotoğrafta birbirine eş 8 adet su tankı vardır. Bir su tankının taban yarıçapı 1 m, yüksekliği ise 4 m'dir. Bu 8 adet su tankının, yere değen yüzleri dışında kalan kısımları boyanacaktır. Boyanacak toplam alan kaç m²dir? (π =3)

A) 27 B) 216 C) 240 D) 270

21.



A silindirinin hacminin, B silindirinin hacmine oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{6}$

YANIT ANAHTARI

1. Ünite Değerlendirme (Sayfa 53)

1. C **2.** B **3.** B **4.** B **5.** D **6.** C **7.** D **8.** C **9.** B **10.** a) 1'dir. b) üssünün c) üsler-tabanlar ç) bilimsel gösterim **11.** B **12.** D D Y Y Y Y D Y **13.** A **14.** A **15.** C **16.** a) 6^2 b) $(-3)^3$ c) 2^5 ç) 5^2 **17.** A **18.** A **19.** A **20.** B **21.** D **22.** C **23.** B **24.** B **25.** D

2. Ünite Değerlendirme (Sayfa 99)

1. B **2.** D **3.** A **4.** A **5.** B **6.** B **7.** a-IV, b-III, c-I, ç-II **8.** C **9.** D **10.** C **11.** C **12.** D **13.** A **14.** D **15.** A **16.** B **17.** D **18.** B **19.** B **20.** C **21.** C **22.** D **23.** D **24.** C **25.** B

26.

Öğrenci Sayısı	Aldıkları Notlar
2	80
3	65
4	70
5	50
6	60

3. Ünite Değerlendirme (Sayfa 142)

1. a) 4 b) $\frac{1}{6}$ c) 0-1 ç) kesin d) imkânsız

2. a) 12 b) Olay: Çekilen kartın üzerinde meyve adı yazması Çıktı: Elma, erik, muz, karpuz, çilek, kiraz, portakal c) Olay: Çekilen kartın üzerinde sebze adı yazması Çıktı: Patlıcan, kabak, ıspanak, patates, fasulye ç) $\frac{7}{12}$

3. 58 kişiden 13'lü erkek ise 45'i kızdır. Kız sayısı fazla olduğundan rastgele seçilen bir kişinin kız olma olasılığı daha fazladır.

4. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{5}{8}$ **5.** imkânsız olay $\rightarrow$ II, III kesin olay $\rightarrow$ I, IV

6. A **7.** C **8.** B **9.** C **10.** C **11.** D

12.

Cebirsel İfade	Terimler	Katsayılar	Değişken
$2x - 8$	$2x, -8$	$2, -8$	x
$6x^2 - 7x - 4$	$6x^2, -7x, -4$	$6, -7, -4$	x
$2 - 5a - 12a^3$	$2, -5a, -12a^3$	$2, -5, -12$	a
$4b - b^3 + b^5$	$4b, -b^3, b^5$	$4, -1, 1$	b

13. C 14. B 15. a) $2x^2 - 24x$ b) $-15a + 3a^3$ c) $4m^3 + 4m^4$ ç) $t^3 - 2t^2 + 3t$

16. D D Y D Y D 17. A

18. $(3x + 4) \cdot (2x + 1) = 6x^2 + 3x + 8x + 4$

$= 6x^2 + 11x + 4$

19. A 20. A 21. B

22. a) $9a^2 - 30ab + 25b^2 = (3a - 5b) \cdot (3a - 5b)$

b) $k^2 - 4mk + 4m^2 = (k - 2m) \cdot (k - 2m)$

23. B 24. C 25. B

26. a) $(x - 6) \cdot 3 = 3x - 18$

b) $(x - 2) \cdot (-2) = -2x + 4$

c) $x \cdot (x + 7) = x^2 + 7x$

27. a) $(a - 2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$

b) $(4 + 5y)^2 = 16 + 40y + 25y^2$

c) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

ç) $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12x + 9y^2$

28. D 29. A 30. A 31. D

4. Ünite Değerlendirme (Sayfa 202)

1. a-X b-VI c-II ç-III d-VIII e-IX f-I g-IV ğ-V h-VII 2. A 3. D 4. B 5. C 6. B 7. A 8. D 9. B 10. C

11. A 12. B 13. D

14.

Aracın otoparkta kalma süresi (x)	Ödenecek ücret
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

doğrunun denklemi: $y = 2x$

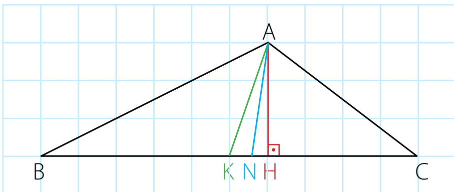
15. B 16. D 17. C 18. A 19. C 20. $m_1 = \frac{2}{5}$ $m_2 = 1$ $m_3 = \frac{5}{2}$ 21. A 22. C 23. D 24. B

25. a) D b) Y c) D ç) D 26. A 27. C 28. B 29. D 30. B

5. Ünite Değerlendirme (Sayfa 256)

1. a) ikizkenar b) yükseklik c) büyük-küçük ç) küçük d) hipotenüs

2.



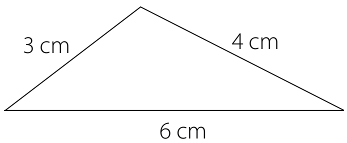
[AH]: yükseklik

[AK]: kenarortay

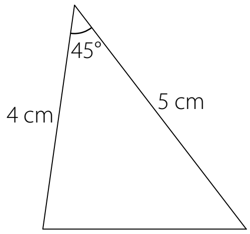
[AN]: açıortay

3. C **4.** B **5.** B **6.** B **7.** D **8.** A **9.** A **10.** A **11.** D **12.** B **13.** C **14.** C **15.** B **16.** B

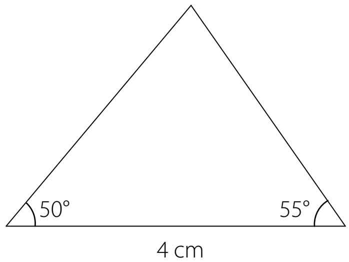
17. a)



b)

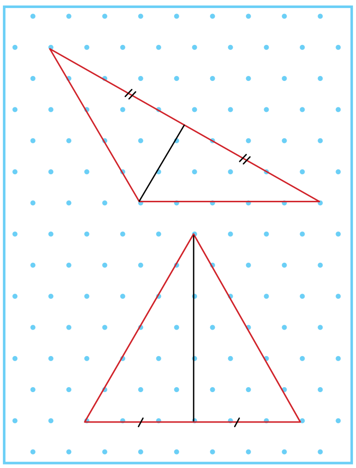


c)



18. C **19.** B

20.



21. C **22.** B **23.** C **24.** B **25.** I. Y II. D III. D IV. D V. Y VI. Y

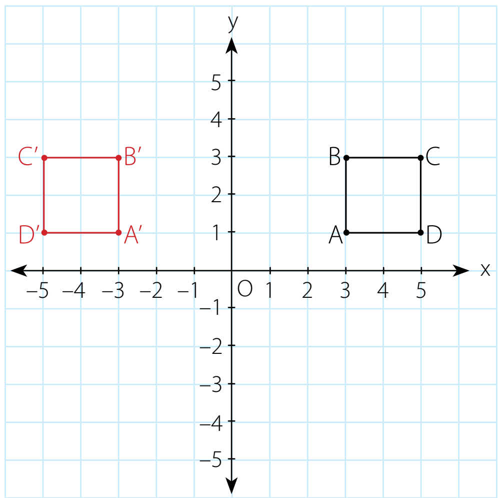
26. B **27.** D **28.** A **29.** C **30.** B **31.** C **32.** a) $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}$ b) $\widehat{ADB} \cong \widehat{CBD}$ c) $\widehat{ADE} \cong \widehat{BCE}$

33. DEAK ≅ DCBK

6. Ünite Değerlendirme (Sayfa 314)

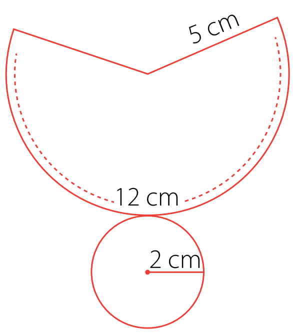
1. B **2.** C **3.** A **4.** I-c, II-ç, III-a, IV-b **5.** A′(2, −1), A″(4, −1)

6.



7. D

8.



9. I-ç, II-a, III-b, IV-c

10. Taban: ABCD karesi

T: Tepe noktası

Yan yüzler: $\overset{\frown}{ABT}$, $\overset{\frown}{BCT}$, $\overset{\frown}{CTD}$, $\overset{\frown}{ADT}$

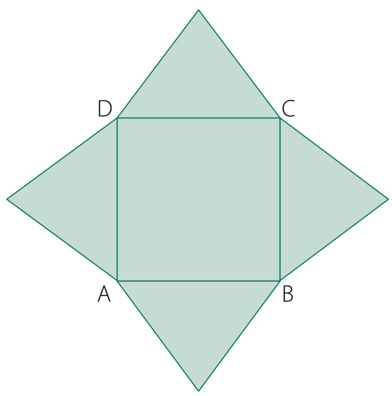
Yükseklik: |TH|

Yan yüz yüksekliği: |TK|

Taban ayrıtları: [AB], [BC], [CD], [DA]

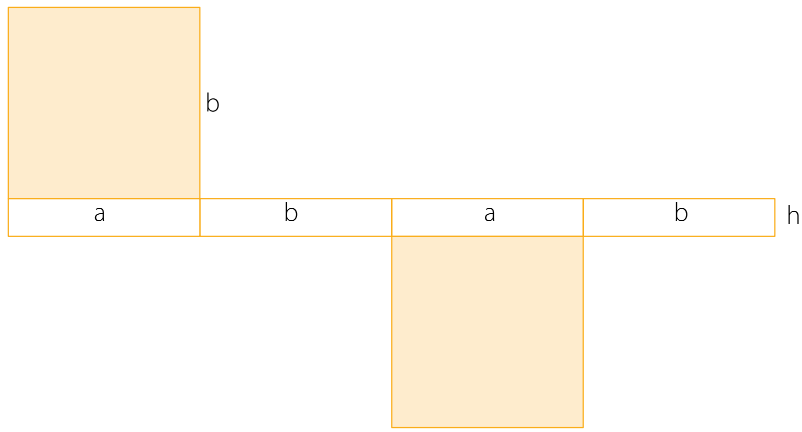
Yan yüz ayrıtları: [TA], [TB], [TC], [TD]

Kare dik piramittir.

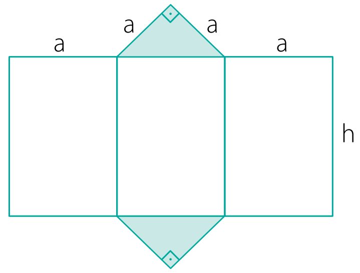


11. C **12.** B **13.** C **14.** D **15.** C

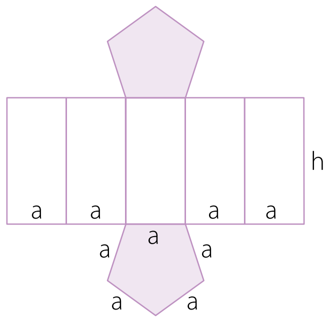
16. a)



b)

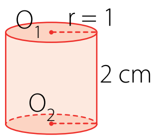


c)



17. a) dik prizma b) üçgen dik prizma c) 4 ç) tabanları arasındaki

18.



19. B **20.** B **21.** C

SÖZLÜK

A

açıklık: Bir veri grubundaki en büyük değerle en küçük değerin farkı.

açıortay: Bir açıyı, ölçüleri birbirine eşit olan iki bölgeye ayıran doğru parçası.

algoritma: Orta Çağ'da ondalık sayı sistemine göre, son zamanlarda ise iyi tanımlanmış kuralların ve işlemlerin adım adım uygulanmasıyla bir sorunun giderilmesi veya sonuca en hızlı biçimde ulaşılması işlemi.

armoni: İki veya daha çok sesin aynı anda kulağa hoş gelecek bir biçimdeki uyumu.

B

bağımlı değişken: Etkilenen ya da başka bir değişkene göre farklı değerler alabilen değişken.

bağımsız değişken: Değeri rastgele belirlenen ve diğer değişkenleri etkileyen değişken.

bağıntı: İki veya daha çok nitelik arasında matematik işlemleri yardımı ile kurulan bağlılık veya eşitlik.

benzerlik oranı: Benzer çokgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları oranı.

Ç

çarpanlara ayırma: Bir cebirsel ifadeyi, iki cebirsel ifadenin veya bir gerçek sayı ile bir cebirsel ifadenin çarpımı şekline getirme.

çıktı: Bir olaydaki olası sonuçlar.

çok büyük sayı: Günlük yaşamda sıklıkla kullanılmayan, çok basamaklı büyük sayılar.

çok küçük sayı: Günlük yaşamda sıklıkla kullanılmayan, çok basamaklı küçük sayılar.

D

dijital: Verilerin bir ekran üzerinde elektronik olarak gösterilmesi.

dik kenarlar: Bir dik üçgende 90°lik açıyı oluşturan kenarlar.

dönme: Bir şekli, belli bir nokta etrafında belli bir açıyla çevirme.

dönme açısı: Bir şeklin dönme merkezi etrafında döndürüldüğü açı.

dönme merkezi: Dönmede şeklin etrafında döndüğü nokta.

E

eğim: Dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı.

en büyük ortak bölen (EBOB): İki sayının ortak bölenlerinin en büyüğü.

en küçük ortak kat (EKOK): İki sayının ortak katlarının en küçüğü.

eşitsizlik: İçinde <, >, ≤ ve ≥ sembollerini ve sayılar içeren cebirsel ifade.

eş olasılık: Bir olaydaki her bir çıktının olasılıklarının eşit olması.

G

gerçek sayı: Rasyonel sayılar ile rasyonel olmayan sayıları içeren ve bir değer ifade eden tüm sayılar.

H

hipotenüs: Bir dik üçgende 90°lik açının karşısındaki kenar.

İ

iki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemi: İki bilinmeyenli doğrusal iki denklem.

imkânsız olay: Gerçekleşme olasılığı olmayan olay.

irrasyonel sayı: Rasyonel olmayan sayı (İki tam sayının oranı biçiminde yazılamayan sayı.).

izometrik: Aynı ölçü, uzunluk veya boyda olma.

K

karekök: Bir sayı birbirine eşit iki pozitif sayının çarpımına eşitse bu çarpanlardan birine, o sayının karekökü denir.

kartuş: Yazıcıya yerleştirilen mürekkep dolu tüp.

kenarortay: Bir üçgenin bir kenarının orta noktasını karşı köşeye birleştiren doğru parçası.

kesin olay: Olma olasılığı 1 olan olay.

kontrast: Karşıt, karşıtlık.

koordinat: Bir noktanın düzlemdeki ya da uzaydaki yerini belirtmeye yarayan yatay ve düşey doğruların ortak adı.

O

olasılık: Bir olayın olabilirlik derecesi.

olay: Bir oluşumdan elde edilen ve olasılık değeri olan sonuç.

Ö

özdeşlik: Bilinmeyenin her değeri için doğru olan eşitlik.

P

piramit: Tabanı çokgen, yan yüzleri ise ortak bir tepe noktasında birleşen üçgenlerden oluşan geometrik cisim.

Pisagor bağıntısı: Bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının kareleri toplamının, hipotenüsün karesine eşit olduğunu gösteren bağıntı.

prizma: Alt ve üst tabanları birbirine eşit ve paralel çokgenlerden ve karşılıklı yan yüzleri birbirine paralel dikdörtgenlerden oluşan geometrik cisim.

S

silindir: Tabanları birbirine eş ve paralel iki daireden oluşan ve ekseni tabanlara dik olan geometrik cisim.

T

taban: Bir geometrik cisimde üzerine yükseklik indirilebilen yüz.

tabur: Dört bölükten kurulan, bir binbaşının komutasındaki asker birliği.

tam kare sayılar: 1, 4, 9, 16, 25 gibi bir doğal sayının karesi olan sayılar.

Ü

üçgen eşitsizliği: Bir üçgende iki kenar uzunluğunun toplamının, üçüncü kenarın uzunluğundan büyük ve iki kenar uzunluğunun farkının mutlak değerin üçüncü kenarın uzunluğundan küçük olması.

Y

yükseklik: Prizma ve silindirde paralel iki taban arasındaki uzaklık, piramit ve konide tepe noktası ile taban arasındaki uzaklık.

yüzey alanı: Bir geometrik cismin tüm yüzlerinin alanları toplamı.

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

a^n	a'nın n. kuvveti
br	birim
br^2	birimkare
L	litre
r	yarıçap
π	pi
[AB]	AB doğru parçası
[AB	AB ışını
|AB|	AB doğru parçasının uzunluğu
$\widehat{A}$	A açısı
$m(\widehat{A})$	A açısının ölçüsü
$\perp$	diklik
//	paralellik
(x, y)	sıralı ikili
$\sqrt{}$	karekök
$>$	büyük
$<$	küçük
$\leq$	küçük ya da eşit
$\geq$	büyük ya da eşit
$\cong$	eşlik
$\sim$	benzerlik
EBOB	en büyük ortak bölen
EKOK	en küçük ortak kat
%	yüzde

KAYNAKÇA

Altun, M. (2002). *Matematik öğretimi*, Bursa: Alfa Yayınları.

Baykul, Y. (2005). *6-8 sınıflar matematik öğretimi*, Ankara: Pegem A Yayıncılık

Bingham, A. (1993). *Çocuklarda problem çözme yeteneklerinin geliştirilmesi.* A. F. Oğuzkan (Çev.). İstanbul: Millî Eğitim Basımevi.

Bryant, M. K. (2003). *Toplama ve çıkarma.* N, ARIK (Çev.). Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

Busbridge, J., Özçelik D.A. (1997). *İlköğretim matematik öğretimi*, YÖK/Dünya Bankası Millî Eğitimi Geliştirme Projesi Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi. Ankara:

Foresman, S. Wesley, A. (1998). *Mıddle school (course 3 math teacher's edition*, United States of America.

Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A. (2009). *Matematik terimleri sözlüğü*, İstanbul: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Olkun, S., Toluk Uçar, Z. (2012). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi,* İstanbul: Eğiten Kitap.

Patrick, J. (Ed.) (2007). *Rennaisence and reformation*, New York: Marshall Cavendish.

Seppo, R., Sintonen, A.M., UUS, L., Leponiemi, Ilmavırtra, R., Laskutaıto, R. (2003). *1. Werner sörderström osakkeyhtiö,* Helsinkinkix.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı *(2018). Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar).* Ankara:

TDK (2012). *Türkçe sözlük*, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

TDK (2012). *Yazım kılavuzu*, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları

Van De Walle, J., Karpo K.s., Bay-Wıllams, J.m. (2013). *İlkokul ve ortaokul matematiği,* S. Durmuş, (Çev.). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Yıldızlar, M. (2012). *Matematik problemlerini çözebilme yöntemleri*, Ankara: Pegem A Yayıncılık.

http://blog.metu.edu.tr/e166567/2012/06/03/cebir-karolari/ (05.02. 2018)

http://blog.metu.edu.tr/e166598/category/materyal/ (05.02. 2018)

http://cv.ankara.edu.tr/duzenleme/kisisel/dosyalar/15122015191928.pdf (05.02.2018)

http://home.ku.edu.tr/~aulger/histofmathematics.html (05.02.2018)

http://rasathane.ankara.edu.tr/files/2013/02/Astronomik_Sayilar_Astronomik_Uzakliklar.pdf (05.02.2018)

http://rasathane.ankara.edu.tr/files/2013/02/Gunes_Sistemi.pdf (05.02. 2018)

http://turkoloji.cu.edu.tr/GENEL/fikri_akdeniz_pisagor_pisagorculuk_felsefesi.pdf (05.02.2018)

http://webdosya.csb.gov.tr/db/gaziantep/webmenu/webmenu6340.pdf (05.02.2018)

http://www.baskent.edu.tr/~tkaracay/etudio/agora/zv/2006/olasilik_tarihi.htm (05.02.2018)

http://www.bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/dusunduren-matematik-olasilik-nedir-teknoloji-bize-olasiligi-aciklar-mi (12.06.2018)

http://www.bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/fotograflar-kosesinde-aralik-ayinin-konusu-yansimala (05.02.2018)

http://www.bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/fotograflar-kosesinde-aralik-ayinin-konusu-yansimalar (05.02.2018)

http://www.biyolojiegitim.yyu.edu.tr/matpdf/pisagorteoremihikayesi.PDF (21.02.2018)

https://cms.inonu.edu.tr/uploads/contentfile/263/files/1_%20TEMEL%20B%C4%B0LG%C4%B0SYAR.pdf (21.02.2018)

https://www.kulturportali.gov.tr/turkiye/amasya/kulturatlasi/gumus-slemeclg (21.02.2018)

http://www.sabancivakfi.org/sayfa/sabanci-kongre-ve-fuar-merkezi (05.02. 2018)

http://www.tuik.gov.tr/UstMenu.do?metod=temelist (05.02.2018)

www.nef.balikesir.edu.tr/~dergi/makaleler/yayinda/6/EFMED_MTE118.doc (05.02.2018)

GÖRSEL KAYNAKÇA

10-11	www.dreamstime.com	ID: 69731486
13	www.dreamstime.com	ID: 6854081
26	www.dreamstime.com	ID: 41978718
28	www.dreamstime.com	ID: 18439303
30	www.dreamstime.com	ID: 37688090
34	www.dreamstime.com	ID: 2251474, 28557215
48	http://rasathane.ankara.edu.tr/files/2013/02/Astronomik_Sayilar_Astronomik_Uzakliklar.pdf (22.02.2018)	
51	www.dreamstime.com	ID: 36745761, 30785717
56-57	www.dreamstime.com	ID: 43685624
58	www.dreamstime.com	ID: 36688951
59	www.dreamstime.com	ID: 21880427
60	www.dreamstime.com	ID: 7046709
64	www.dreamstime.com	ID: 35052863
69	www.dreamstime.com	ID: 27215957
83	www.dreamstime.com	ID: 45659835
90	www.dreamstime.com	ID: 42836749
102-103	www.dreamstime.com	ID: 87534616
104	Yayınevi arşivi	
105	Yayınevi arşivi	
105	www.dreamstime.com	ID: 37554732
106	www.dreamstime.com	ID: 34412772
107	www.dreamstime.com	ID: 37554732
111	Yayınevi arşivi	
114	www.dreamstime.com	ID: 6988752
118	www.dreamstime.com	ID: 39818608, 10718608
119	http://i.ytimg.com/vi/1CSP7xkLMGE/maxresdefault.jpg (22.02.2018)	
130	Yayınevi arşivi	
132	www.dreamstime.com	ID: 5700595
146-147	www.dreamstime.com	ID: 18021128
149	www.dreamstime.com	ID: 44710407
155	Yayınevi arşivi	
158	www.dreamstime.com	ID: 7273272
159	www.hgk.msb.gov.tr (12.06.2018)	
164	Yayınevi arşivi	
167	www.dreamstime.com	ID: 41523525
176	www.dreamstime.com	ID: 4937590, 16959504
177	Yayınevi arşivi	
177	www.dreamstime.com	ID: 14421311
178	www.dreamstime.com	ID: 6960276
188	www.dreamstime.com	ID: 46399727
189	Yayınevi arşivi	
191	www.dreamstime.com	ID: 5073558
196	www.dreamstime.com	ID: 4580233
204	Yayınevi arşivi	
208-209	Yayınevi arşivi	
210	www.dreamstime.com	ID: 9317975
217	www.dreamstime.com	ID: 26541501
224	www.dreamstime.com	ID: 31064342
228	www.dreamstime.com	ID: 16700530
240	www.dreamstime.com	ID: 693697
242	Yayınevi arşivi	
244	www.dreamstime.com	ID: 27201563, 18119457
246	www.dreamstime.com	ID: 19424478
247	Yayınevi arşivi	
252	Yayınevi arşivi	
254	Yayınevi arşivi	
255-257	Yayınevi arşivi	
260	Yayınevi arşivi	
264	Yayınevi arşivi	
266-267	www.dreamstime.com	ID: 32913096
268	www.dreamstime.com	ID: 32726784
278	www.dreamstime.com	ID: 23424340
279	www.dreamstime.com	ID: 20802362, 44180364
280	www.dreamstime.com	ID: 40470135
281	www.dreamstime.com	ID: 45431243
282	www.dreamstime.com	ID: 20393978

283 www.dreamstime.com ID: 22616064, 37704537, 31576138

284 www.dreamstime.com ID: 33023937, 26991310, 17412437, 20989677, 24029899

290 www.dreamstime.com ID: 41635482, 29563329, 41042772, 3177279

290 http://1.bp.blogspot.com/_innFiVqN_LI/S8cXVAI7ChI/AAAAAAAAAFE/oKIJZ2QI-S0/s1600/Tower.jpg (22.02.2018)

302 www.dreamstime.com ID: 23118085

307 www.dreamstime.com ID: 47151876

309 www.dreamstime.com ID: 6004131

310 www.dreamstime.com ID: 31058557, 45231501, 23232854, 34011091, 35188068

311 www.dreamstime.com ID: 29991051

316 www.dreamstime.com ID: 20675063, 249571, 12796878, 30904578, 13859763, 43244628, 35535700

322 Yayınevi arşivi

323 www.dreamstime.com ID: 28655135, 22731353